بسم الله الرحمن الرحيم

# مقدمة المترجم

هذه ترجمةٌ لورقة علمية اعتنت بجمعٍ عدد من الفروع الرياضية المتعلقة

نستعمل في هذا المختصر متحرِّجِينْ مُتأَسِّفِينْ الترميزاتِ الأعجميةَ لصعوبةِ تعريبها (ولكني أكتب المعادلة بالعربية ان شاء الله قدر الطاقة والوسع والوقت) وقلّةٍ فاهمي مُعَرَّبِها فاضطررنا الى استعمالها كما هي مع اشتراطنا كتابة معناها بالعربية ان شاء الله

ملاحظة:

لعلّي ألخص ان شاء الله وأحشّي هذه العناوين من الأوراق المشهورة:

- The Matrix Cookbook
- The Matrix Calculus You Need For Deep Learning
- Probability and Statistics Cookbook
- CS229: Math Linear algebra + probability
- Set and group theory papers
- 3b1b linear algebra and calculus Essential
- Math for ML w&b
- Matrix derivatives cheat sheet

# مقدمة المصنف

يُستعمل في مجال تعلم الآلة عدد منوع من فنون الحساب والرياضيات وهذه محاولة لتلخيص المتطلبات الرياضية اللازمة لمقدمة تعلم الآلة في بركلي. وظنوننا أن القارئ له سابقة علم مع التفاضل والتكامل عديد|متعدد المتغيرات والجبر الخطي وننبه أن هذه الأوراق ليست بديلا للمتطلبات الفصلية فقدر درست كفاية فأردنا تقديم تصور وممسك للقارئ المستزيد للتدقيقات والتحقيقات في التفاصيل الآتية. وينبه أن مقصد الورقة (المستند) هو التأسيس (التأصيل) الرياضي لمن أراد هذا الفنّ لا مافي العلم نفسه ولذا لن نتطرق لنماذج محددة عدا ما يلزم ليتبين علاقته بالمحتوى الرياضيّ.

وليعلم أن الإبرازات السابقة لم تتضمن البراهين لقوانينها وقد بدأنا اضافتها وهي قصيرة مفهومة وزيدت لترفع فهم طالب المادة ولكنها ليست ضرورية له ونفعها في تركيز فهم القارئ.

تنبيه: أنت حر لنشر الملف كما تحب ونسخته المحدثة توجد على هذا الرابط ونرجو إعلامنا بأي خطأٍ على البريد [1]

---

[1] س: يحسن تقديم شيء عن علم المجموعات و الجبر المجرد إذ استعملت ولم تشرح

الترميزات (مسرد-جدول الرموز المستعملة)

| الرمز | معناه | رمز |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | مجموعة الأعداد الحقيقية | ح |
| $\mathbb{R}^n$ | مجموعة (فضاء متجهي) مكون من عدد من الأعداد الحقيقية يستعمل عادة في الجُداء الداخلي (بعد المتجه) | $ح^{ن}$ |
| $\mathbb{R}^{m \times n}$ | مجموعة من المصفوفات لها m, n من الأبعاد | $ح^{ن×م}$ |
| $\delta_{ij}$ | معرف أو دالة لها الصياغة التالية: إن تساوى عمودها بصفها فقيمتها تصبح واحدا وإلا فالصفر (ديلتا كرونيكر)<br>$\delta_{ij} = 1$ if $i = j$, 0 otherwise | |
| $\nabla f(\mathbf{x})$ | تدرج الدالة عن المتجه x (س: ويسمى عادة المشتق الجزئي الأول) | |
| $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ | هسّي الدالة عن المتجه x (وهو الاشتقاق الجزئي الثاني) | |
| $\mathbf{A}^\top$ | منقول المصفوفة A | |
| $\Omega$ | فضاء العينة | |
| $\mathbb{P}(A)$ | احتمال حدوث المتغير أو الحدث A | |
| $p(X)$ | توزيع المتغير العشوائي X | |
| $p(x)$ | دالة كتلة احتمال عند $\boldsymbol{x}$ | |
| $A^c$ | متمم الحدث A | |
| $A \dot{\cup} B$ | اتحاد المجموعتين بتخصيص أن متداخلهما فارغ (لا تداخل بينهما) | |
| $\mathbb{E}[X]$ | القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X | |

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{Var}(X)$ | تباين المتغير العشوائي X | |
| $\mathrm{Cov}(X,Y)$ | تغاير (المتغير) بين العشوائين X, Y | |

تنبيهات أخرى

- حبرت[2] المصفوفات والمتجهات بالسواد وذلك صالح لكل الأبعاد في الفضاء فعادتنا استعمال الحروف اليونانية للمحددات والكبيرة الرومانية للمصفوفات والمتغيرات العشوائية
- وللتركيز على مستوى محدد من التجريد قيدنا أنفسنا بالمجال (الفضاء) الحقيقي ولكن عموم المكتوب صالح لغيره من الفضاءات كالعقدية ولكننا يسرنا وسهلنا الإبراز على المذكور
- والمتجهات التي نستعملها نفرض عموديتها أبعادا في واحد فيصير منقولها صفا بعكس ذلك

[2] س: التحبير هو الخط الغامق ولكنها أفصح قال صاحب بهجة الطلب: "أبياتها مع الزيادة التي .. حَبَّرْتُها بأربعين عُدَّتِ

# الجبّر الخطي

في هذا الفصل نقدم أهم الأبواب عن الفضاءات التي ستدور فيها بياناتنا وعملياتها وهي فضاءات المتجهات و الفضاء المتري والمنظم وفضاءات الجداء الداخلي. وعمومًا فالمقصود ابزار/اظهار بعض أهميات الفضاء/الهندسة الإقليدية.

## فضاءات المتجهات

وهي أصل وأساس عمليات هذا العلم **فالفضاء المتجهي** هو مجموعة (عناصرها اسمهم **متجهات**) تحدث/تعرف فيها عمليتان وهما جمع المتجهات وضربها بأعداد حقيقيةٍ[3] هي **السلمِيَّات** (العدديات) شروطه التالية

- أولها وجود عنصر محايدٍ جمعي يكتب **0** صفرا محبرا في الفضاء[4] بحيث إن جُمِع مع متجه (من هذا الفضاء) لم يتغير
- ثانيها اشتراط وجود مقلوبٍ لكل متجه في هذا الفضاء جمعهما يساوي المحايد الجمعي ورمز هذا المقلوب x-
- ثالثها كالأولى ولكنه ضربي (يكتب **1** واحدا محبرا)
- رابعها التبادلية أي جمع المتجهين لا يؤثر فيه ترتيبهما
- خامسها خاصية (التجامع) التجميع في الجمع والضرب (مع السّلّميات) فلا فرق في جمع ثلاثة متجهات أو أكثر بكيفما بدأت وكذا ترتيب ضرب السلميات بالمتجه
- سادسها التوازعية (التوزيعية) وهي توزيع ضرب سلمي على جمع متجهين وكذا عكس ذلك | توازعية ضرب ... و ... [طريقة أخرى]

واعلم أن مجموعة المتجهات التي في الفضاء **مستقلةً خطيًا** إن لم يمكن كتابة مجموعهم مضروبًا بسلميات إلا إن كانت أصفارا

A set of vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ is said to be **linearly independent** if

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \text{implies} \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

**والبسطة**[5] بسطة المتجهات في الفضاء هي مجموعة المتجهات التي يُعبر عنها بعلاقة خطية أي يمكنك كتابة أي متجه في الفضاء عن طريقة جمع متجهات منه مضروبة بسلميّات أو كل المتجهات التي يمكن تكوينها من قواعد (أسس) الفضاء بالعلاقة السابقة

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v} \in V : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ such that } \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v}\}$$

---

[3] و بالإطلاق (بالعموم) يمكن تعريف فضاءات المتجه حول حقل F يساوي R ولكن درءًا للإشكالات وتجريدٍ زائد استعضنا عنه به

[4] س: إذا أطلقنا اسمَ الفضاء فنعني به الرمز V وقد تركنا ذكره لسلاسة السياق العربي إلا عند الحاجة والله المستعان

[5] س: في بعض المصادر وجدتهم يطلقون عليه لفظ المدى وهو أرجح عندي لأنه أوضح مع أن لفظ البسطة أيضا يدل على بسطة المتجهات أي ما تغطيه

واعلم أن مكونات البسطة مستقلون خطيا إن أمكن مدهم (بسطهم) على كل الفضاء ويسمون حينها أسسا واحدها أساس له ومنه يعلم أن كل مجموع متجهي مستقل ينتج عنه بسطة للفضاء ولها حالان إما أن يكون فضاءها مسبوطا بعدد محدود (منتهٍ) من المتجهات فيسمى **منتهي الأبعاد** وعكس ذلك بعكسه (لا/غير منتهٍ) وعدد هذه المتجهات يسمى **بُعْدَ** الفضاء.

## الفضاء الإقليدي

وهو محور وجوهر الفضاء مكونٌ من عدد من الأعداد الحقيقية المجموعة وفي هذه الورقة اعتمدنا التعبير العمودي

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

وعلى هذا التعبير عُرِّفت عملية الضرب السّلّمي لكل عدد وكذا عملية الجمع فكل عدد من المتجهين المجموعين يجمع مع مقابله.

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad \alpha\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

وينبه إلى أن الفضاء الإقليدي ممثل للفضاء الفيزيائي (الريزيائي) بما فيه من مفاهيم الطول والزاوية ومعروف أن تمثيل ما يتجاوز الأبعاد الثلاثة صعب ولكن رياضيا هي واضحة ورغم ذلك فالأحسن أن تمثل ما تحسبه جمعًا أو ضربًا في صياغات متجهاتٍ ثنائية الأبعاد في الفضاء ثلاثيه.

## الفضاءات الجزئية

يمكن للفضاء المتجهي (الشعاعي) أن يتضمن أخرى جزئية وشرط أحدها:

- أن يوجد العنصر المحايد الجمعي فيه
- وأن يبقى فيها ناتج جمعي متجهين من ذلك الجزئي فيه
- وكذا المضروب السلمي ناتجه يبقى فيه

ولاحظ أن الفضاء دائمًا جزءٌ من نفسه[6] وهذا عام للمتجه الصفري (التافه) | وهذا يشمل المتجه التافه (الصفري). ومثاله خط من أصل الفضاء الإقليدي. ولو افترضنا فضاءين جزئين فإن مجموعها هو مجموع متجهاتهما والناتج لا بد داخل في الفضاء الأصل

[6] س: هذا الوصف في النفس منه شيء

وعندما يكون تداخلهما صفراً فذا هو **المجموع المباشر** وله رمز دائرة بقطرين متعادين وعليه فإن أي متجهين من هذين الفضاءين الجزئين يصلح كتابتها على صورة مجموع لمتجهين منهما وهذا شرط للمجموع المباشر.
إن مجموع الأبعاد للفضاءين الجزئين يكون بتوزيع الجمع ثم تطرح منه ما تداخلها (تشاركاه) وأما في المجموع المباشر فذلك صفر ويبقى الجمع الأول.

## التطبيقات الخطية

وواحدها تطبيق خطي وتعريفه[7]: دالة تنقلك (تدلك, توجه, تقرن) فضاءين بالشروط التالية (أو وشروطها):

- توزيعية الدالة أي ان جمعت المتجهين فيها أمكن توزيعها عليهما فرديًا
- وكذا تجميعية الضرب.

ورمزها المعتمد (وهو المتبوع هنا) أن تسقط الأقواس الزائدة (التي نجدها في الدالة العادية) لانعدام الالتباس وكذا منه نعبر عن تركيب تطبيقين (دالتين) بدون العلامة المشهورة (وهي الدائرة الصغير المفرغة ∘).
و اسم التطبيق الذي يرجع الفضاء لنفسه **مؤثر خطي** .
وانظر للتعريف تعريف التطبيق تلفه معبرا (مبينا أو مظهرا) لبناء فضاءات المتجه حيث يحوي عمليتاه الجمع والضرب السّلمي ففي التعبير (أو وبتعبير جبري) الجبري التطبيق الخطي يسمى **تشاكلا** لفضاءات المتجه وقلوبه[8] (حيث معاكسه أيضا تشاكلي) يُسمَّى **تماكلا**[9] ونكتب مساواة الفضاءين التقريبيّ (هذا الرمز ≅). ففضاءات المتجه المتماكلة -بشكل مؤصل أو أساسي- نفس الشيء في سياقات الهياكل الجبرية. وهنا نكتة لطيفة أن معدود الأبعاد (محدوده) من فضاءات المتجه[10] على (في) المتجه دائما متماكلان ان كان الفضاءان بنفس البعديّة (أي عندهما نفس البعد) فيصير (فينتج) عن ذلك علاقة التشاكل الطبيعي: وهو تطبيق من الفضاء الأول للثاني ينتج عنه مجموعة سلّميات (تطبق/تدل) لمتجهاتِ الفضاءين

$$\varphi : V \to W$$
$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \mapsto \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{w}_n$$

---

[7] س: الدالة من المعجم قاعدة رياضية بين مجموعتين تقرن بكل عنصر من المجموعة الأولى (التي تسمى مساحة الدالة أو نطاقها أو منطلقها أو مجموعة تعريفها) عنصرا واحدًا فقط من الثانية (التي تسمى مستقر الدالة أو مداها أو مجموعة قيمها) صـ٢٦٤

[8] س: قلوب أي قابل للقلب والهاء هنا تعود على التشاكل أي التشاكل القلوب

[9] س: في المعجم أن التماكل مشتق من كلمتين يونانيتين يساوي ويشكل (وانظر صـ367 لمزيد من تفصيل التعريف)

[10] على نفس الحقل

حيث أن هذه المتجهات هي أساساتهما (قواعدهما) وذا تطبيق يعم كل متجه في الفضاء الأيسر (فضاء المنطلق) مما يمكن عرضه بتمثيل خطي من متجهاته. وبسهولة يمكن تأكيد تماكلية هذه الدالة $\varphi$ وبه أن الفضاءين متماكلين. فلكل عددِ أبعادِ فضاءٍ متجهٍ تماكلٌ في نفس عدد الأبعاد[11]

مصفوفات التطبيق الخطي

فضاءات المتجه تعبير (تمثيل) مجرد إن أردنا عرضه والتعامل معه في الحاسوب مثلناه على شكل (هيئة) مستطيل من قوائم الأرقام ويسمى **مصفوفة**[12].

فلنفترض فضاءين منتهِيَي الأبعاد (محدودين) مع أسسهما ومع تطبيق خطي من الأول للثاني فإن مصفوفة التطبيق T عن كل عنصر فيها $A_{ij}$ يصير مقابلا في عملية التعبير الخطي

$$T\mathbf{v}_j = A_{1j}\mathbf{w}_1 + \cdots + A_{mj}\mathbf{w}_m$$

فصير العمود j من **A** مصفوفة التطبيق مقابلا لما للأسس المختارة لمصفوفة المخرج (المدى). وعليه فإن أي مصفوفة تمثل تطبيقا خطيا من بعد لآخر $T\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

وتمثيل (وشكل هذه المصفوفة) بالنسبة للأسس التي في عمْدُها وصفوفها و**منقولها** يكون بجعل كل عمود منها صفا فتنعكس الأبعاد ولهذه المنقول صفات جبرية نذكرها:

- أن منقول منقولها يرجعها لنفسها
- وأن منقول من تحت الجمع يتوزع عليه
- وأن السلمي يخرج عنه
- وأن المصفوفتين المضروبتين تحت النقل يتوسع على عكس ترتيبهما

الفضاء الصفري والمدى

أحد أهم الفضاءات الجزئية الناتجة عن التطبيق الخطي . فإن طبقنا تطبيقا بين فضاء لآخر عرّفنا **فضاء صفريا**[13] عليه وهي مجموعة لذا التطبيق من متجهات من الفضاء الأول (من التطبيق المذكور سابقا) يُصفّره وأما **المدى** لذا التطبيق فمتجه من الفضاء الثاني ناتجٍ عن التطبيق على متجه أو أكثر من الأول. وذانِ أي الفضاء الصفري والمدى لذا التطبيق الخطي فضاءان جزئيان لمجاله (domain) ومداه دائما (دوما).

---

[11] س: انظر معنى كلمة **maplet** على هذا الرابط

[12] س: في المعجم تعريف المصفوفة "هي صفيفة مستطيلة من العناصر عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n " انظر صـ435

[13] أحيانا يسمى نواةً لدى الجبريين و استعضنا عنه لاختلاف دلالته في مجال تعلم الآلة

**والفضاء العمودي** لمصفوفة هو بسطة أعمدته (كمتجات) وكذا **فضاء السطور** وهو بسطتها وكلا البسطتين على بعديهما. ولا يبعد عن ذهنك أن الأول لمصفوفة هو هو مدى تطبيقها الخطي من بعد (أبعاد) الأعمدة لبعد صفوفها ويُرمز لها بمدى(المصفوفة) وعليه فمنقول تي المصفوفة مداه الفضاء السطري (السطوريّ).

وحقيقة أن بعد الفضاء العمودي يساوي بعد فضاء السطور وهذا اسمه **رتبة** المصفوفة ومعادلتها تساوي بعد مدى المصفوفة.

## الفضاءات المترية

وهي تعميمٌ لتعابير (تعبيرات) المسافة من الفضاء الإقليدي (مع أنها لا ينبغي أن تكون فضاءات متجه).

**فالمتري** (دالة المسافة) على مجموعة دالة ينطبق عليها الآتي

- مسافتها (قيمة مسافتها) لا تنقص عن الصفر وتساويه ان تساوى متجهاها
- والمسافة بين متجهين متساوية كيفما جئتها يمينا أو يسارا (تبادلية)
- والمسافة بين نقطتين على أقصاها تساوي أو تقل عن مجموع المسافة بين أخرى مع الأولى ونفسها مع الثانية واسم ذا **متراجحة المثلث**

وما سبق لكل متجهات في المجموعة المذكورة سابقا.

مبدأ الأساس والسبب الأهم للمقاييس هو حد (توسيع\تعميم) التعريف ليعمّ الأشياء (العناصر) الرياضية الأخرى غير الأرقام الحقيقية . ونُمثّلُ ذلك بمتتالية ضمن مجموعة تتقارب للنهاية (س) لأي عدد أكبر من الصفر فلا بد من عدد طبيعي حيث أن المسافة بين العدد وأي آخر من المتتابعة أصغر من العدد ص. وما سبق تعريف للأعداد الحقيقية مما رؤيَ في درس التفاضل هو خصوصية حالة لهذا التعريف عند استخدام المسافة بين نقطتين فتساوي مطلق طرحهما

## الفضاءات النظيمية

وهي تعميم لترميز (لمبدأ) المسافة (لحساب المسافة في الفضاء الإقليدي) من الفضاء الإقليدي

**فالنظيم** لمتجه حقيقي دالة (تطبيق) من الفضاء لعدد حقيقي (تعطي أو تنتج عددا حقيقيا) تحقق التالي:

- أنها تساوي الصفر فقط عندما يكون صفرا المتجه
- يخرج الضرب مطلقًا (أي قيمته المطلقة) من الحساب
- مجموع متجهين تحته على الأكثر يساوي مجموعهما متفرقين (**متباينة المثلث** أخرى)

فلكل متجهين في فضاء ما وعدد حقيقي فالفضاء الذي وافق الشروط يوهب (يُعطَى) نظيما فيسمى **فضاء متجهي مُنظَّم أو فضاء منظم**

ولاحظ أن أي نظيم تحت الفضاء يتضمن مسافة عليه لها الخصوصية المذكورة في آخر الفصل الماضي .

والطالب له أن يتأكد من أن المسلمات للمسافات (المذكورة سابقا) تحقق تحت هذا التعريف وبذلك نستنتج أن أي فضاء منظم هو فضاء متري[14] واهتمامنا سيكون على بعض المنظمات على المتجهات الحقيقية

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1)$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

يظهر أن رمز المنظم خطان على كل طرف للمتجه مع رقم في الزاوية اليمنى السفلى وهو جمع عناصر المتجه مع رفعه لجذر الرقم المزوَّى إلا الواحد فهو جمع مطلق الأعداد وأما نهاية فهي أكبر رقم مطلق في المتجه. ولا يخفى أن الحالة الثالثة عامة تشمل الأولى والثانية وأن الرابعة نهاية لها لما لا نهاية وكذا يشترط أن تكون قيمة المزوَّى أكبر من الصفر لأن عكس ذلك لا يعمل[15].

وإليك نكتةً لطيفة: لكل متجه منتهٍ معطى من فضاء معين كل المنظمات على ذلك الفضاء متكافئات في مبدأ أن لكل نظيمين ذوي عددين مختلفين (فلنسمي الأول أ والثاني ب) يوجد ثوابت أكبر من الصفر (فلنسمي الأول ض والثاني ب) بحيث أن مضروب ض بـ أ أصغر من نظيم ب والذي هو أصغر من ب مضروبا بالنظيم أ

$$\alpha\|\mathbf{x}\|_A \leq \|\mathbf{x}\|_B \leq \beta\|\mathbf{x}\|_A$$

فلكل متجه في الفضاء إن تقارب نظيم واحد فهذا ينطبق (يتطبق) على باقي النظيمات (تأكد من جمع نظيم لعلها نُظَّام) ولكن تي القاعدة قد لا تنطبق في الفضاءات غير المنتهية كفضاءات الدوال

## فضاءات الجداءِ الداخلي

**والجداء الداخلي** على فضاء متجهٍ حقيقي هو دالة (تطبيق) <.,.> يعطي (ينتج) عددا حقيقيا شروطه (يطابق الشروط التالية):

- تطبيقه على نفس المتجه لا يقل عن الصفر ولا يساويه إلا عند صفريته (تصفره)
- خانته الأولى تحتمل التوزيع خطيا وكذا اخراج الضرب

$$\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle \text{ and } \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

- وهو تبادليٌّ.

وما سبق فهو لكل متجهات من الفضاء المذكور آنفا وعددٍ حقيقي فالفضاء المتجهي مضروبه يُسمى فضاء الجُداء الداخلي

---

[14] إذا كُلِّلَ الفضاء المنظم مع المتري تحت نظيمه (أي نظيم المتري) فذا **فضاء باناخ** (فضاء خطي منظم على حقل الأعداد [فضاء خطي منظم تام] انظم صـ49 من المعجم).

[15] س: جرب أن تختار رقما أقل من الواحد وطبق القاعدة

ولاحظ أن أي جداء داخلي على الفضاء يتضمن نظيما عليه (أي على الفضاء أو فيه)

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

وأحدنا يقدر على التأكد من المسلمات للنُّظم (جمع نظيم) من التعريف متابعةً (تقريبا) مسلمات الجداءات الداخلية وبه فإن أي جداء داخلي نظيم أي متري [يمكن اختصار المكتوب: تنطبق مسلمات النظم على مقابلتها (أو هي نفسها) في الجداءات الداخلية فصارت مثلها ومن تصير متريةً][16]

فأي متجهين يوصفان بالتعامد (**متعامدان**) إن ساوى جداءهما الداخلي صفرا ويكتبان بهذه العلامة بينهما $\perp$ اختصارا.

التعامد يعمم مفهوم العمودية من الفضاء الإقليدي وإن ساوت قيمة متجهين متعامدين قيمةً تكافئية (وحدوية) أي واحدا $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$ فيوصفنا أنهما **متجهان متعامدان منظمان.**

الجداء المنظم الداخلية المعياري (الأصلي) على فضاء ذي أبعاد محددة حقيقي هو مضروب منقول المتجه الأول بالثاني

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

والتعبير (الترميز) المصفوفي على اليمين (أي من الصورة التي فوق) هو حالة خاصة من ضرب (جداء) المصفوفات الداخلي المنتج عددا سُلَّمِيًّا (محددا). والجداء الداخلي على فضاء الأعداد الحقيقية يُكتب عادةً بنقطة بين المتجهين " · " (وذا يسمى **جداء داخلي (سُلَّمي)**) ولك قارئنا أن تبرهن (تؤكد) أن النظيم الثنائي على فضاء الأعداد الحقيقية مُحدث من هذا الجداء.

نظرية فيثاغورس

وهي المعروفة المشهورة والتي تتعمم طبيعيا على فضاءات الجداء الداخلي المختارة (أظن أنها ذات صفات معينة)

فأول النظريات أن إن تعامد متجهان فمجموع مجموعهما تحت نظيم ذو درجةٍ ثانيةٍ يتوزع فيه التناظم

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

وإثبات (برهان) النظرية كالتالي: حيث نعلم أن جداء المتعامدين الداخلي صفر ومنه فإن وزعنا الطرف الأيمن (ذو الترميز النظيمي) على ترميز الجداء الداخلي فإنه سيكون مجموع المتجهين في الطرفين مقلوبا وهذا إن فككناه حسب الشروط السابقة فسيصير مجموع أربعة جداءات اثنان منها صفر حسب ما بدأنا ويبقى ما يرجع لترميزه النظيمي

*Proof.* Suppose $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, i.e. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Then

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

[16] إذا كُلَّ الجد٠اء الداخلي انتظاما مع المسافة المترية المتعلقة به أطلقنا (أسميناه) فضاءا هلبرتيا (فضاء هلبرت)

متباينة كوشي و شفارتز

وهي ذات نفع في إثباتات التحديدات وتنص على أن مطلق قيمة الجداء الداخلي لمتجهين لا تتجاوز قيمة مضروب نظيميهما الأول

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \; \|\mathbf{y}\|$$

فلكل متجهين في فضاء فالسابق يتساوى فقد عندما يكونان مضروبا قلبٍ لبعضهما (أي أحدهما مقلوب الآخر ) أو بصيغة أخرى أن يكون أحدهما مرتبطا خطيا بالآخر

الإسقاطات والمتممات العمودية

إن وُجد فضاء جزءًا من الفضاء الرئيسي وهو جدائي داخلي فإن **المتمم المعامد** لهذا الفضاء الجزئي يضاف له رمزا ⊥ على زاويته اليمنى العليا وهي مجموعة المتجهات من الفضاء الرئيسي والتي تعامد متجهات الفضاء الجزئي كلها

$$S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{s} \text{ for all } \mathbf{s} \in S\}$$

وسهل بيان أن هذا المتمم (أي المتمم المعامد) جزء من الرئيسي لأي جزئيٍّ منه وليس شرطا (هذه العبارة مقتضبة جدا وتحتاج إطنابا) ولكن إن كان ومنتهيا فينتج (فيصير أو يحدث أو يكون) التفريق أو التحليل التالي:

- الفرض الأول (المسألة [القضية] الأولى) لنفرض ع فضاءا جدائيا داخليا و س جزئي محدود إذا فلكل متجه (رمزه م) في ع يمكن كتابة الصيغة التالية:[حول خطوط أحرف المعادلات لخط النسخ وقد صرت أرمز بالعربي]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{\perp} \qquad \text{م} = \text{م}_{\text{س}} + \text{م}_{\perp}$$

حين أن الأول من ع والثاني من متممهِ المعامِد

ونشرع بعون الله في إثبات القضية (المسألة):

*Proof.* Let $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ be an orthonormal basis for $S$, and suppose $\mathbf{v} \in V$. Define

$$\mathbf{v}_S = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_m \rangle \mathbf{u}_m$$

and

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_S$$

لتكن قواعد (أسس) [ا١,ا٢ , ا٣ … , ان] الفضاء س المتعامدة ولنفرض أن م متجهٌ من الفضاء ف فنعرِّفُ:

$$\text{م}_{\text{س}} = \langle \text{م}, \text{ا}_{١} \rangle \text{ا}_{١} + \langle \text{م}, \text{ا}_{٢} \rangle \text{ا}_{٢} + \langle \text{م}, \text{ا}_{٣} \rangle \text{ا}_{٣} + \ldots + \langle \text{م}, \text{ا}_{\text{ن}} \rangle \text{ا}_{\text{ن}}$$

مع

$$\text{م}_{\perp} = \text{م} - \text{م}_{\text{س}}$$

وواضح أن $\text{م}_{\text{س}}$ إذ هي ضمن بسطة القواعد وأيضا فإن لكل ( ب = ١ , … م)

$$\langle \text{م}_{\perp}, \text{ا}_{\text{ب}} \rangle = \langle \text{م} - (\langle \text{م}, \text{ا}_{١} \rangle \text{ا}_{١} + \ldots \langle \text{م}, \text{ا}_{\text{م}} \rangle \text{ا}_{\text{م}}), \text{ا}_{\text{ب}} \rangle =$$

= <اب,ام> <ام,م> ... - <اب,ا١><ا١,م> - <م,اب>

٠ = <م١,اب>-<م١,اب>

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_\perp, \mathbf{u}_i \rangle &= \langle \mathbf{v} - (\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_m \rangle \mathbf{u}_m), \mathbf{u}_i \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i \rangle - \cdots - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_m \rangle \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_i \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

مما ينتج عنه م⊥ داخل في ف⊥

وبقي أن نحقق تميز هذا التقسيم (التفريق أو التحليل) بحيث أنه لا يعتمد على تغير الأسس (القواعد) ولذا فلنضع اَ١ , ... , اَم كأسس مختلفةٍ متعامدةٍ منظمة (أي طولُ كلٍّ منها واحد) للفضاء ف ونعرف مَ س و مَ⊥ قياسيا وندعي أن هذه القواعد وذا الفضاء والمتمم يساوون ما سبق من خلال التعريف

$$\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} = \mathbf{v}'_S + \mathbf{v}'_\perp$$

$$\underbrace{\mathbf{v}_S - \mathbf{v}'_S}_{\in S} = \underbrace{\mathbf{v}'_\perp - \mathbf{v}_\perp}_{\in S^\perp}$$

م س + م⊥ = م = مَ س + مَ⊥

ومنه

م س - مَ س = م⊥ - مَ⊥

واعلم أن الطرف الأيمن : م س - مَ س ∋ س والأيسر : م⊥ - مَ⊥ ∋ س⊥

ومن ثمَّ فمن تعامد هذه الفضاءات الجزئية ينتج (لدينا)

أن الجداء الداخلي ⟨م س - مَ س , م⊥ - مَ⊥⟩ للطرف الأيمن والأيسر يساوي الصفر (للتعامد) ومن فنستبدل الأيسر بنفس الأول للتقابل وذا ينتج منه أنهما يساويان نظيمًا ذي درجةٍ ثانية ||م س - مَ س||٢ = ٠ ونستنتج منه أن الفضاء الجزئي م س يساوي متممه ونتيجة ما سبق الكلية أن الفضاء الأساسي مَ⊥ = م - مَ س = م - م س = م⊥ كذلك

ويعلم من وجود وتميُّز التفريق (التحليل) السابق أن الفضاء العام ف يساوي مجموعا مباشرا (direct sum) من الفضاء س ومتممه حيثُ س جزئي

ف = س ⊕ س⊥

$$V = S \oplus S^\perp$$

وحَيثُ أن التطبيق من م الى م س في التفريق (التحليل decomposition) السابق دائم الوجود مميزٌ [مميزا على الحالية] فلدينا [فيصير] عندنا دالة (تابع) واضح التعريف

د س: ف ← س

م ⟼ م س

ويُطلق عليه **إسقاط عمودي** (orthogonal projection) على س وذكرنا أهم صفاته (خصائص) في الأسفل

- المسألة (الفرض الثاني) الثانية ليكن لدينا فضاء جزئي من الفضاء العام (س من ف) وقواعد من ($ا_١$ , ... $ا_ن$) من س :

- فإن لكل متجه من ف ومعامداته المنظمة من س ينتج عندنا التطبيق التالي:والذي فيه أن أي متجه من س يُكتب على صيغة جداء داخلي بينه وبين الأسس المنظمة من س مضروبا بالقاعدة (الأساس)

$$P_S\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_m \rangle \mathbf{u}_m$$

ت $_{س}$ م = <م,$ا_١$>$ا_١$ + ... + <م,$ا_ن$>$ا_ن$

- لكل متجهٍ م في ف فإن طرح تطبيقه ت $_{س}$ م (من الدالة أو التطبيق السابق) منه معامد لـ س

*For any* $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} - P_S\mathbf{v} \perp S$.

- التطبيق ت خطيٌّ
- وكذا فهو هو محايد مرتبطا (مُشترَطًا) بـ س أي تطبيقه على أي متجه من س يرجعه نفسه
- مدى مخرجات ت يساوي س وصفريّه (عدمه) (null) يساوي متمم س ($س^{\perp}$)
- ت$^{٢}_{س}$ = ت $_{س}$
- لكل متجه م في ف ||ت $_{س}$ ف|| ≦ ||م||
- وكذلك (حيث أن س متجه من الفضاء الجزئي س) ||م - ت $_{س}$ م|| ≦ ||م - س||

مع مساواةٍ فقط إن تساوى س = ت $_{س}$ ف والتي

ت $_{س}$ ف = أقل مطروح ||م-س|| حيث س من الفضاء س

برهان ذلك:

أول قضيتين ثابتتان من تعريف التطبيق ت والعمل من القضية السابقة وهنا فنحن نكتُب ت $_{س}$ = ت اختصارا.

ونبدأ بإثبات القضية الثالثة:

لنفترض أن ش,ص متجهان من ف وإن ء عدد صحيح. فنكتب ش = ش $_{س}$+ ش$_{\perp}$ و ص = ص $_{س}$+ ص$_{\perp}$ حيث أن ش $_{س}$ و ص $_{س}$ من الفضاء س و ش$_{\perp}$, ص$_{\perp}$ من متمم س ($س^{\perp}$) فعندها ش + ص = مجموع السوابق كلٌّ مع أخيه

(iii) Suppose $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Write $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}_\perp$ and $\mathbf{y} = \mathbf{y}_S + \mathbf{y}_\perp$, where $\mathbf{x}_S, \mathbf{y}_S \in S$ and $\mathbf{x}_\perp, \mathbf{y}_\perp \in S^\perp$. Then

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{x}_S + \mathbf{y}_S}_{\in S} + \underbrace{\mathbf{x}_\perp + \mathbf{y}_\perp}_{\in S^\perp}$$

وإن طبقنا على ش و ص مجموعين التطبيقَ ت (ونذكر أنه ذو مدخلٍ من الفضاء ف فيمدُّه أي يخرجه للفضاء س) فالجواب ش$_{\perp}$+ ص$_{\perp}$ أي التطبيق عليهما منفردين وكذا ضرْبُ ش بـ ء فتتوزع على ش $_{س}$ و متممه (مجموعين)

وعليه فالتطبيق على الجداء (الضرب) ت(ءش) = ء ش $_{س}$ = ءت س وعليه التطبيق ت خطي [انتبه أنه خرَّج شروط الخطية تتابعها]

Suppose $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Write $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}_\perp$ and $\mathbf{y} = \mathbf{y}_S + \mathbf{y}_\perp$, where $\mathbf{x}_S, \mathbf{y}_S \in S$ and $\mathbf{x}_\perp, \mathbf{y}_\perp \in S^\perp$. Then

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{x}_S + \mathbf{y}_S}_{\in S} + \underbrace{\mathbf{x}_\perp + \mathbf{y}_\perp}_{\in S^\perp}$$

so $P(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}_S + \mathbf{y}_S = P\mathbf{x} + P\mathbf{y}$, and

$$\alpha\mathbf{x} = \underbrace{\alpha\mathbf{x}_S}_{\in S} + \underbrace{\alpha\mathbf{x}_\perp}_{\in S^\perp}$$

so $P(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}_S = \alpha P\mathbf{x}$. Thus $P$ is linear.

برهان الرابعة وبالله الإعانة

ان كان ش ضمن س فجمعه مع صفري ٠ من متمم س يبقيه وتطبيقُه نفسُه

(iv) If $\mathbf{s} \in S$, then we can write $\mathbf{s} = \mathbf{s} + \mathbf{0}$ where $\mathbf{s} \in S$ and $\mathbf{0} \in S^\perp$, so $P\mathbf{s} = \mathbf{s}$.

برهان الخامسة

مدى التطبيق ت جزءٌ (بضع أو بعض) من س من التعريف (رمزا مدى(ت)⊇ س وعكسه [تأكد من العكس إن لم يكن خطأً] مستعملا النتيجة السابقة فإن أي متجه من س ک ش ينتج عن تطبيقٍ على م الذي من الفضاء ف يَعني أنهما متساويان ش = م

عدم\صفري(ت) جزءٌ من متمم س فافرض متجهًا منه تكتبه من مجموع أجزاءه من الفضاء س والفضاء المتمم فعليه: فإن تطبيق م يساوي صفرا والذي يساوي متجه $س_س$ ومنه فإن المتجه م يساوي نظريه من المتمم م = $م_⊥$ من الفضاء المتمم وعكس السابق كله أي جزئية المتمم من الصفريّة إن كان متجه من المتمم فجمعه مع متجهٍ صفري من الفضاء الأصلي يبقيه وعليه فتطبيقه صفر

range($P$) $\subseteq S$: By definition.

range($P$) $\supseteq S$: Using the previous result, any $\mathbf{s} \in S$ satisfies $\mathbf{s} = P\mathbf{v}$ for some $\mathbf{v} \in V$ (specifically, $\mathbf{v} = \mathbf{s}$).

null($P$) $\subseteq S^{\perp}$: Suppose $\mathbf{v} \in \text{null}(P)$. Write $\mathbf{v} = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{\perp}$ where $\mathbf{v}_S \in S$ and $\mathbf{v}_{\perp} \in S^{\perp}$. Then $\mathbf{0} = P\mathbf{v} = \mathbf{v}_S$, so $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} \in S^{\perp}$.

null($P$) $\supseteq S^{\perp}$: If $\mathbf{v} \in S^{\perp}$, then $\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}$ where $\mathbf{0} \in S$ and $\mathbf{v} \in S^{\perp}$, so $P\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

برهان السادسة:

ش هو متجه من الفضاء ف وتطبيق ت عليه مرتين يبقيها نفسه ت$^٢$ ش = ت(ت ش) = ت ش حيث لأن التطبيق على ش ضمن الفضاء س هو متطابقة Identity على س وعليه ت$^٢$ = ت

برهان السابعة

افرض م متجها من ف فبنظرية فيثاغورس (مع السوابق):

||م||$^٢$ = ||ت م + (م - ت م)||$^٢$ = ||ت م ||$^٢$ + ||م + ت م||$^٢$ ≤ ||ت م||$^٢$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|P\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P\mathbf{v})\|^2 = \|P\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - P\mathbf{v}\|^2 \geq \|P\mathbf{v}\|^2$$

وتالي النتائج بعد أخذ الجذر

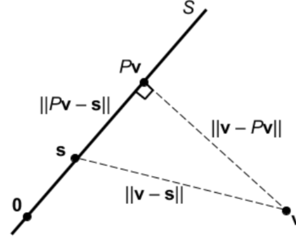
برهان الثامنة

افرض م من ف و ش من س (م ∈ ف , ش ∈ س ) فمن ثم ||م-س||$^٢$ =

||(م - ت م)+(ت م - ش)||$^٢$ = ||م - ت م||$^٢$ + ||ت م - ش||  ≤ ||م - ت م||$^٢$

ونستنتج منه ||م-ش|| ≤ ||م - ت م|| من خلال تجذيرها والمساواة تبقى فقط إن ساوى ||ت م - ش||$^٢$ صفرا والتي تصح فقط إن ساوى تطبيق م ش.

• وأي تطبيق خطي يحقق مساواته مع ضربه بنفسه فيُسمّى **إسقاطا projection** وأظهرنا (بينا) أن التطبيق $ت_س$ إسقاط وآخر فقرة من النتيجة المُظهرة تبين الإسقاط العموديّ (المتعامد) الذي يحل مشاكل الاستمثال optimization لإيجاد أقرب نقطة من الفضاء س لنقطةٍ معطاةٍ في الفضاء ف وهذا ظاهر بيّنٌ من التصوير (التمثيل):




والآن فلنفترض س جزئيا من ح ن [فضاء الأعداد الحقيقية ذي الأبعاد] مع قواعد منظمة متعامدة: ق١ , … , ق م فيصير تطبيق ت س على متجه ك يساوي مجموع الجداء الداخلي بين القواعد واحدةً واحدةً مع ك مضروبا في القاعدة وهذا إن فُكَّ أنتجَ أن مجموع ضربِ القواعد تواليا بمنقولها كل ذلك يُضرب بـ ك (وانتبه أن هذا في المتجهات لا الأعداد) وعليه فيمكنُ كتابة التطبيق على صورة جداء مصفوفتين (هي نفسها ومنقولها حيث هي جامعة القواعد معًا صفًّا أي مرتبة صفوفا واستعمل فيه خاصية مجموع الجداء الخارجي)

$$P_S\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}^\top \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top \mathbf{x} = \left( \sum_{i=1}^{m} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top \right) \mathbf{x}$$

$$\mathbf{P}_S = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top = \mathbf{U}\mathbf{U}^\top$$

## ذاشية [17]

لكل مصفوفةٍ م∋ ح ن×ن مربعة قد يوجد متجهاتٍ عندما تُطبق المصفوفة عليها كأنها حركت (تغيرت) بثابت. نقول أن المتجه س ذا البعد ن (المساوي بعد المصفوفة) **متجهٌ ذاتي EigenVector** للمصفوفة م يقابلُ **القيمة الذاتية EigenValue** ق إذا كان ضرب المصفوفة بالمتجه يساوي ضربها بالقيمة

**م س = ق س**

واستُبعد المتجه الصفري من التعريف لأنه صحيح لكل قيمة. والآن نبين نتائج مفيدة حول هذه القيم بعد بعض التغييرات (التلاعبات)

القضية الثالثة (هذه تابعة للسوابق في الفصل الماضي):

ليكن س متجها ذاتيا لـ م مع قيمتها الذاتية المقابلة لها فعليه:

م مصفوفة, س متجه, ر عدد حقيقي, ع عنصر محايد, ذ متجه ذاتي

1. لكل متغير ر ∋ ح (حقيقي) فـ **س** متجه ذاتي لـ م + رع (ع هو عنصر محايد) مع القيمة الذاتية ق + ر
2. وإذا كانت م منعكسة فـ س متجه ذاتي للمعكوس مع مقلوب القيمة الذاتية ق-١

---

[17] س:[نحت من أشياء ذاتية إذ eigen values هي قيم ذاتية وهو ما ذكره المؤلف بوب بـ Eigenthings فنَحَتُّه منها]

3. م$^{ك}$س = ق$^{ك}$ س لكل ك ∋ ص (صحيح) (ومنه فالصفر يساوي مصفوفة الحياد ع بالتعريف)

برهان الأولى مقروءٌ من التالي

(م + رع)س = م س + رع س = م س + ر س = (م + ر)س

برهان الثانية: افرض م مصفوفة منعكسة فإذا

س = م$^{-1}$ م ء = م$^{-1}$(ذ س) = ذ م$^{-1}$ س

فإذا قسمنا على ذ وهو ممكن لانعكاسية م فقيمة ذ ليست صفرية فيعطي ذ$^{-1}$ س = م$^{-1}$ س.

برهان الثالثة: في حالة ك ≤ ٠ فبالاستقراء يتبع على ك فتعم هذه الحالة أنه عدد صحيح ربطًا بينها مع البرهان الثاني

## الأثر

أثر المصفوفة المربعة هو جمع عناصر قُطرها

$$\text{أ}(\text{م}) = \text{مجـ}_{\text{ن} = ١}^{\text{ك}} \text{م}_{\text{ن،ن}}$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

وله خصائص جبرية لطيفة [باعتبار م مصفوفة مربعة]:

١. أ(م + ب) = أ(م) + أ(ب)

٢. أ(ر م) = ر أ(م)

٣. أثر المصوفة يساوي منقولها أ(م) = أ(م$^{T}$)

٤. أثر جداء أربع مصفوفات يساوي ترتيبها كيفما كان

أما أول ثلاثة فناتجون من التعريف وأما الرابع فهو **ثابت تحت التباديل الدورية** invariance under cyclic permutations (بحلي نحتاً). تنبه أن ترتيب المصفوف لا يكون تعسفيًّا بل ينبغي أن يكون تراتبيا (قطارًا) وهذه الصفة منطبقة على أي عدد من المصفوفات لا مَربعٍ فقط.

ومن اللطيف أن أثر المصفوفة يساوي مجموع قيمها الذاتية (متكررةً حسب تعددها (التعدد))

## المحدد/ة

**المحددة** هي مصفوفة مربعة يمكن أن تُعرَّفَ بعدة طرق ولا واحدة منها تُهمّنا فإن أردت معرفة ذلك فانظره في كتاب أو مقالة ويكي ولكن يَجمُل معرفة خصائصها (سنرمز لها محـ()):

- محـ(م) = ١ [حيث م مصفوفة محايدة]
- محـ(س) = محـ(س$^{\perp}$)
- يوزع التحديد على جداء مصفوفتين محـ(س ش) = محـ(س) محـ(ش)
- يخرج التعاكس (عملية المعاكس) ليعم المحدد مع مصفوفته محـ(س$^{-1}$) = محـ(س)$^{-1}$
- محـ(زس) = ز$^{\text{ن}}$ محـ(س) [حيث ز عدد حقيقي]

ومن اللطيف أن محدد المصفوفة يساوي مضروب ذاتياته على الترتيب القُطري

محـ(س) = مضـ$_{\text{ن}}$ ذ$_{\text{ن}}$(س)

## مصفوفات متعامدة

المصفوفة ق المربعة تُسمى **متعامدة** إذا كانت أعمدتها نظيمية ً متزاوجة وذا التعريف يُنتج أن جُداءها بمنقولها يُنتج العنصر المحايد

$$ق \cdot ق^{\top} = ق^{\top} \cdot ق = ع \quad [\text{ع مصفوفة المحايدة}]$$

وكذا منقولها يساوي معكوسها ومن محاسنها أيضا أنها تُقز في الجداء الداخلي مثل: $(ق \cdot س)^{\top} (ق \cdot ص) = س^{\top} \cdot ص$ (حلها)

وكذا على النظيم الثنائي $\|ق\ س\|_{2} = \text{جذر}\{(ق\ س)^{\top} (ق\ س)\} = \|س\|_{2}$

وعليه فإن جداءً على هذا النوع هو تحويل (تطبيق) محافظٌ على الطول ولكن قد يَلفُّ أو يُدير على المحور المجدية به

## المصفوفات المتناظرة

هي مصفوفة مربعة تُسمّى **متناظرة** إن كان منقولها يساويها وذا التعريف ظاهره اليُسر ولكنه أظهر خصائص ونتائج مفيدةً جدا خلاصتها التالي:

**النظرية الثانية**: (النظرية الطيفية) إن كانت س مصفوفة مربعة فإن هناك قواعد منظمة في أبعادها تتكون من متجهاتها الذاتية.
تطبيق النظرية العملي يكون في تفريق المصفوفات المتناظرة ويُرمز أو هذا يُسمى **التفريق الشيئيّ** أو **التفريق الطيفي** eigendecomposition spectral decomposition. تنبه أن قواعد (أسس) المتجهات الشيئية المنظمة $ذ_{1}, ذ_{2}, \dots, ذ_{ن}$ مع قيمهم الذاتية $ق_{1}, ق_{2}, \dots ق_{ن}$ فلتكن ذ مصفوفة منظمة متعامدة كالذالات السابقة أعمدةً و ء قُطرها(قافاتها) وبالتعريف $س\ ذ_{ن} = ق_{ن}\ ذ_{ن}$ لكل ن هذه العلاقة تنطبق

$$س\ ذ = ذ\ ء$$

## خوارج قسمة ريلي

فلتكن س متناظرةً والعبارة $ء^{\top} س\ ء$ تُسمى **صيغة تربيعية quadratic form**
وقد ظهر أن هناك علاقات جميلة بين هذه الصيغة وبين المصفوفة المتناظر وقيمها الذاتية وقُدمّت عن طريق **مُخرجات القسمة (الحواصل) لريلي Rayleigh quotient**

$$ر_{س}(ء) = ء^{\top} س\ ء \setminus ء^{\top} ء$$

ولهذا الحاصل خصائص جميلة مهمة سهل على قارئنا التأكد منها من التعريف وينبغي له:

- **تدرج غير متغير** لكل ء لا يساوي الصفر وكذا رقم حقيقي ز فإن $ر_{س}(ء) = ر_{س}(ز ء)$
- ان كان ء متجهيا شيئيا لـ س مع قيمة ذاتية ق فإن $ر_{س}(ء) = ق$

ويمكننا أن نظهر أن هذا الريليّ محدود بالقيم الذاتية لـ س من أدناها لأعلاها ولكن قبل ذلك فلنظهر استعمالا خاصا لآخر نتيجة

قضية رابعة: لكل ء [متجه] حيث ||ء||٢=١

ق أقل (س) ≤ ء^⊤ س ء ≤ ق أعلى (س)

فقط إذا كان ء يُقابل متجها ذاتيا

وبرهان ذلك أن نظهر صحتها لأعلاها لأنها مع أدناها متماثلة (متشابهة).

طالما س متناظرة يمكن تحليلها (تفريقها) لمصفوفتين ظ د ظ^⊤. ثم نستعمل تغير المتغير ص = ظ^⊤ء, ملاحظًا العلاقة بين ء و ص مقابل واحد لواحد أن ||ص||٢ = ١ طالما ظ متعامد لذلك:

أكبر ||ء||٢=١ [ء^⊤ س ء] = أكبر ||ص||٢ = ١ [ص^⊤ د ص] = أكبر ص^٢١ + ص^٢٢ + ... ص^٢ن = ١ [مجـ م = ١ ^ن (ذن ص^٢ن)] {ملاحظة: المعادلة مصاغة بالكلزية بطريقة أفضل فانتبه}

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} \mathbf{y}^\top \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \max_{y_1^2+\cdots+y_n^2=1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

مكتوبةً بهذه الطريقة واضح أن ص تُكبّر هذا التعبير فقط إذا وافقت

$$\sum_{i\in I} y_i^2 = 1 \text{ where } I = \{i : \lambda_i = \max_{j=1,\ldots,n} \lambda_j = \lambda_{\max}(\mathbf{A})\}$$

مجـ(ن من ط) ص^٢ن = ١ حيث ط [مجموعة] {ن:ق ن = أكبر ر = ١, ... م ق م = ق أكبر (س) }

و ص م = ٠ لكل م ∉ ط والتي تحتوي على دليل أو أماكن أكبر القيم الذاتية وفي هذه الحالة القيمة العليا للتعبير هي:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \sum_{i\in I} y_i^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{A})$$

مجـ(ن الى م) ق ن ص^٢ن = مجـ(م من ط) ق ن ص^٢ن = ق أكبر (س) مجـ(م من ط) ص^٢ن = ق أكبر (س)

والمكتوب ق١, ... , ق ن أعمدة ق فلدينا

ء = ق ق^⊤ ء = ق ص = مجـ(ن الى م) ص ن ق ن = مجـ ص ن ق ن

حيث استعملنا جداء العنصر المحايد لمصفوفة المتجه

استحضر أن ق١, , ... , ق ن هي قيم ذاتية لـ س وتمثل أسسا نظامية لأبعاد ن ومنه بناءًا أن المجموعة {ق ن : م من ط} تُمثل قواعد منظمة للفضاء الذاتي لـ ق أكبر (س) وعليه ء تركيب خطي لها واقعٌ في الفضاء الذاتي وهو متجه ذاتي لـ س تُقابل ق أكبر (س)

قد أظهرنا أن القيمة الكبرى لـ ||ء||٢ = ١ لـ [ء^⊤ س ء] = ق أكبر(س) ومنها لدينا المتباينة ء^⊤ س ء ≤ ق أكبر(س) لكل طول وحدوي لـ ء.

ومن خاصية التدرج غير المتغير للحاصل الريلي فورا لدينا نتجت كنتيجة (طالما ء^⊤ س ء = رس(ء) لكل ء وحدوي)

**النظرية الثالثة:** نظرية أقل أكبر (اكثر) لكل ء لا تساوي صفرا

ق أقل (س) ≤ رس (ء) ≤ ق أكبر(س)

هذه المتباينة فقط إذا كان ء مقابلا لمتجه ذاتي

ما سبق عادةً يُسمى **الصفات المتغير للقيم الذاتية variational characterization of eigenvalues** لأنها تعرض القيم الذاتية أكبرها وأصغرها في صيغة تصغير والتكبير (تعظيم)

$$\text{ق}_{\text{أصغر}\backslash\text{أكبر}}(\text{س}) = \text{أقل}_{\text{ء} \neq ٠} \backslash \text{أكبر}_{\text{ء} \neq ٠} \; \text{ر}_{\text{س}}(\text{ء})$$

## مصفوفات موجبة (شبه مُحددة) [18]

أ مصفوفة متناظرة توصف بالموجبة شبه المحددة إذا كان جُداءها مع كل متجه من الفضاء النوني ومقلوبه أكبر من الصفر $\text{س}^{\top}\text{أ س} \geq ٠$ وأحيانا بعضهم يكتب المذكور س > ٠ (لم أجد نفس الرمز إذ فيه خط أسفله ولكن هذا شبيهه) والذي يدل على أن س موجبة شبه محددة.

المصفوفة المتناظرة س **موجبة مُحددة** إذا لكل متجه ء غير صفريٍّ $\text{ء}^{\top}\text{س ء} > ٠$ ويُرمز لها بـ > ٠ . واعلم أن هذا الشرطَ أشد من السابق أي كل موجبة محددة شبيه لا العكس فهو غير صحيح.

القضية الخامسة: أن المصفوفة المتناظرة تكون شبه محددة فقط إن كانت قيمها الذاتية غير سلبية وأما كاملة التحديد (موجبة محددة) أن تكون تلك القيم موجبةً.

برهان القضية:

افترض أ موجبة شبه محددة واجعل س متجه القيم الذاتية لـ أ مع القيم الذاتية ذ فعندها:

$$٠ \leq \text{س}^{\top}\text{أ س} = \text{س}^{\top}(\text{ذ س}) = \text{ذ س}^{\top}\text{س} = \text{ذ} \|\text{س}\|_{٢}^{٢}$$

$$0 \leq \mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\top}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}^{\top}\mathbf{x} = \lambda\|\mathbf{x}\|_2^2$$

طالما س ≠ ٠ (على اعتبار أنها قيم ذاتية) لدينا $\|\text{س}\|_{٢}^{٢}$ أكبر من الصفر فيمكننا قسمة الطرفين على السابق لنحصل على ذ ≥ ٠ فهي شبه محددة. وإن كانت محددة كاملةً فالشرط يشتد فيصير أكبر من الصفر فقط وهذا يُثبت جهةً واحدة.

ولتيسير البرهان من الطرف الآخر فسنستعمل آلية بقية قسمة ريلي. فافترض أ متناظرةً وكل قيمها الذاتية ليس سلبية ولكل س ≠ ٠

$$٠ \leq \text{ذ}_{\text{أقل}}(\text{أ}) \leq \text{ر}_{\text{أ}}(\text{س})$$

طالما $\text{س}^{\top}\text{أ س}$ تساوي $\text{ر}_{\text{أ}}(\text{س})$ في الإشارة فسنستخلص أن أ موجبة شبه محددة. وإن كانت القيم الذاتية لـ أ موجبون فقط فعندها $٠ < \text{ذ}_{\text{أقل}}(\text{أ})$ وإن استمر ذا الشرط فـ أ موجبة محددة

وكمثال كيف تظهر هذه المصفوفات انظر

القضية السادسة:

---

[18] لعل استعمال "محددة" يراجع فبعد مراجعة المُعجم مرَّةً أخرى وجدتها معرفة فيُنظر

افترض أ ∋ ب $^{م×ن}$ [المقصود بها أبعاد] فعندها أ$^{T}$أ موجبة شبه محددة. إذا صفرية(أ) = {٠} وعندها فذاك الجُداء موجب محدد.

المصفوفات الموجبة المحددة مُنعكسة (لأن قيمها الذاتية غير صفرية) وأما الشبيهة فقد وقد لا. واعلم أن الشبيهة يمكن التلاعب بقطرها لتنتج محددة موجبة

القضية السابعة: إن كانت أ شبه محددة موجبة وكان إ > ٠ وعليه أ + إ م [ميم عنصر محايد] وبرهان ذلك [س: خلاصته أن ما سبق ذكره في القضية السابقة تصير إ مضروبة في ||س||$^{٢}_{٢}$ ]

افترض: أ شبه محددة موجبة وإ > ٠ لكل س ≠ ٠

$$س^{T} (أ + إ م)س = س^{T} أ س + إ س^{T}م س = س^{T}أس [≤ ٠ ] + إ ||س||^{٢}_{٢} > ٠$$

كما أُفترض أن نتيجة من القضيتين أظهرنا أن أ$^{T}$أ + إ م موجبة محددة (وتأكيدا مُنعكسة) لكل مصفوفة أ و إ > ٠

هندسة الصيغ التربيعية للموجبة المحدد

طريقة مفيدة لفهم الصيغ التربيعية هي هندسة أطوار (مراحل) مجموعاتها. **مجموعة مستوًى (مجموعة سوية)** أو **تكفاف**[19] لدالة (تطبيق) هو مجموعة كل المدخلات التي تُطبق على الدالة وتُعطي مخرجا. رياضيا ر-التكفاف لدالة هو {س ∋ مجال د: د(س) = ر}

فلنفترض الحالة الخاصة د(س) = س$^{T}$ أ س [تذكير أن أ مصفوفة موجبة معرفة]. طالما أ موجبة معرفة فإنه يصير لها جذر مربع مميز أ$^{\frac{١}{٢}}$ = ق.غ.ق$^{T}$ حيث المذكور هو تحليل القيم الذاتية لـ أ وأما أ$^{\frac{١}{٢}}$ فهي قطر($\sqrt{ذ_١}$ ... $\sqrt{ذ_ن}$) وسهل أن يّظهر أن أ$^{\frac{١}{٢}}$ أيضا موجبة معرّفة (بالنظر لقِيَمِها الذاتية) وتنتج

أ$^{\frac{١}{٢}}$ أ$^{\frac{١}{٢}}$ = أ. بتثبيت قيم ر ≤ ٠ فإن ر-تكفاف د هو مجموعة س ∋ ب$^{ن}$ والتي تساوي

$$ر = س^{T} أ س = س^{T} أ^{\frac{١}{٢}} أ^{\frac{١}{٢}}س = ||أ^{\frac{١}{٢}}س||^{٢}_{٢}$$

حيث استعملنا تناظر أ$^{\frac{١}{٢}}$. بجعل التغير في المتغير ز = أ$^{\frac{١}{٢}}$س لدينا الشرط أن ||ز||$_{٢}$ = $\sqrt{ر}$ فإن قيمة ز تقع على كرةٍ ذاتِ قدر يساوي جذر ر. هؤلاء يمكن توسيطها[20] كـ ز = $\sqrt{ر}$ژ حيث ژ تساوي ||ژ||$_{٢}$ = **١. ثم وطالما أن** أ$^{-\frac{١}{٢}}$= ق.غ$^{-\frac{١}{٢}}$.ق$^{T}$ فلدينا:

$$س = أ^{-\frac{١}{٢}} ز = ق.غ^{-\frac{١}{٢}}.ق^{T} \sqrt{ر}ژ = \sqrt{ر}\ ق.غ^{-\frac{١}{٢}} ژ$$

---

[19] س: هذا النحت أنا استخلصته من فهمي لما كُتب من معنى iso و contour في المعجم وهما التساوي والكفاف

[20] كلمة parameterized تأتي من وسيط وهو ما يمكن التحكم فيه فقمت باشتقاق توسيطها من ذلك وانتبه للسياق لألا تشترك مع الأوسط في الإحصاء (وكل ذلك حسب المُعجم المعتمد فقط سمى median أوسط ووسطا وسمى mean متوسطا وسمى parameter وسيطا فانتبه

حيث أن ژ = ق$^{\top}$ ژ والتي تحقق ||ژ||$_{٢}$ = ١ طالما ق متعامد. باستعمال التوسيط يمكننا رؤية أن حل المجموعة {س ∈ ب$^{ن}$: د(س) = ر} هو صورة كرةِ وحدةِ [المجموعة] {ژ ∈ ب$^{ن}$: ||ژ||$_{٢}$ = ١} تحت انعكاس التطبيق الخطي س = √ر ق.غ$^{-\frac{١}{٢}}$ ژ

الذي اكتسبناه من هذه التلاعبات هو فهم جبري لـ ر-تكفاف الدالة د في حدود التحويلات المتتالية المُطبّقة على مجموعة مفهومة.

بدأنا بكرة وحدةٍ وبعدها درّجنا (من التدريج) كل صف ف [فاء رقم الصف] بـ ذ$_{ص}^{-\frac{١}{٢}}$ والذي أنتج في كل صف محاذٍ مجسّمًا ناقصيا (اهليجيا).

استنتجنا أن محور الأطوال للمجسم مطردةٌ مع معكوس الجذر المربع للقيم الذاتية لـ أ ومنه فتكابرها (تكبيرها) يُقصّرُ أطوال المحور والعكس صحيح.

وبعدها فهذا المجسم الناقصي ذي المحاور المتحاذية في ظروف (أثناء) تحول جامد (لم أجد ترجمة rigid في المعجم) (مثاله ذاك الذي يحفظ الطول والزوايا كالدوران والانعكاس) من ق. نتيجة التحول أن محاور القطع الناقص لم تعد تمتدُّ على احداثيات المحاول عموما ولكن على الإنتجاها المُعطاة من القيم الذاتية المقابلة. ولترى ذلك افترض متجهَ وحدةٍ و$_{ص}$ ∈ ب$^{ن}$ والذي لديه [و$_{ص}$]$_{ع}$ = ﺩ$_{ص،ع}$ [ﺩ هذا الرمز استعملته بدل ديلتا δ] في فضاء التحويل القبلي, نقاط ذا المتجه على امتداد المحور مع الطول تتطرد مع ذ$_{ص}^{-\frac{١}{٢}}$. لكن بعد التحويل الجامد ق المتجهُ الناتج يؤشر في اتجاه المتجه الذاتي المقابل (المتقابل) ق$_{ص}$ طالما:

$$\text{ق و}_{\text{ص}} = \text{مجـ}_{(\text{ع} = ١ \text{ الى ن})} \left( [\text{و}_{\text{ص}}]_{\text{ع}} \, \text{ق}_{\text{ص}} = \text{ق}_{\text{ع}} \right)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} [\mathbf{e}_i]_j \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i$$

حيث استعملنا جُداء المصفوفة والمتجه الحايد السابق

خلاصة الأمر أن تكافيف [جمع تكفاف والتي هي كلمة isocotours] د(س) = س$^{\top}$ أ س قِطَعٌ ناقصة محاولها تؤشر باتجاه القيم الذاتية لـ أ أنصاف أقطارها مطردةٌ مع معكوس الجذر المربع للقيم الذاتية المقابلة (المتقابلة)

## تحليل القيم الشاذة[21]

هذا التحليل طريقة كثيرة الاستعمال في الجبر الخطي قُوتها تكمن في أن كل مصفوفة مستطيلة أ ∈ ب$^{م×ن}$ لديها تَقشٌ (من أوائل الحروف) كالتالي:

$$\text{أ} = \text{و س ف}^{\top}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\top}$$

[21] وهي Singular value decomposition

حيث و ∈ ب $^{م×م}$ و ف ∈ ب $^{ن×ن}$ مصفوفات متعامدة و س∈ ب $^{م×ن}$ كذلك متعامدة مع **القيم الذاتية** لـ أ (تُرمز ءي) على قُطرها.

فقط أول مرتبة ر = مرتبة(أ) غير صفرية وبالتعريف (المصطلح) وهم بترتيب غير متزايد

$$ء_١ \geq ء_٢ \geq \dots ء_ر \geq ء_{ر+١} = ء_{أقل(م,ن)} = ٠$$

وبطريقة أخرى نكتب بها التقش (بجمع الجداء الخارجي للعنصر المحايد)

$$أ = جمـ_ي^{ر} [ء_ي ك_ي ق_ي^{\top}]$$

حيث ك و ق هم أعمدة المصفوفتين "و" و "ف" تقريبا

ولاحظ أن عوامل التقش تقدم تحليلا ذاتيا للعلاقة $أ^{\top}أ$ و $أأ^{\top}$:

$$\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A} = (\mathbf{U\Sigma V}^{\top})^{\top}\mathbf{U\Sigma V}^{\top} = \mathbf{V\Sigma}^{\top}\mathbf{U}^{\top}\mathbf{U\Sigma V}^{\top} = \mathbf{V\Sigma}^{\top}\mathbf{\Sigma V}^{\top}$$
$$\mathbf{AA}^{\top} = \mathbf{U\Sigma V}^{\top}(\mathbf{U\Sigma V}^{\top})^{\top} = \mathbf{U\Sigma V}^{\top}\mathbf{V\Sigma}^{\top}\mathbf{U}^{\top} = \mathbf{U\Sigma\Sigma}^{\top}\mathbf{U}^{\top}$$

وهذا يتبع أن أعمدة ف (متجهات شاذة يُمنى لـ أ) هي متجهات ذاتية لـ $أ^{\top}أ$ وأما أعمدة و هي اليسرى لـ $أ^{\top}أ$

وأما المصفوفات $س^{\top}س$ س $س^{\top}$ ليس شرطا أن يكونا بنفس الحجم ولكن كلاهما متقاطر مع القيم المربعة الشاذة لـ $ء_ي^{٢}$ على القطر (تقريبا مع اضافة بعض الأصفار) حيث القيم الذاتية لـ أ هي تربيع جذور القيم الذاتية $أ^{\top}أ$ (وتقريبا لـ $أأ^{\top}$)[22]

## المبرهنة الأساسية في الجبر

بغض النظر عن اسمها الرنان فذي المبرهنة ليست إجماعا (غير مجمع عليها). فهناك غباشة (عشاوة أو ضباب) (عدم التأكد) في عباراتها والذي نرجحه مناسب لهدفنا (مقصدنا):

مبرهنة رابعة: إن كانت أ مصفوفة ذات صفوف ميمية وأعمدة نانية ح $^{م×ن}$

1. صفريُّ(أ) = مدى$(أ^{منقول})^{معامدها}$ ← $(أ^{\top})^{\perp}$
2. صفري(أ) ⊕ مدى$(أ^{\top})$ = ح $^{ن}$
3. أبعاد مدى(أ) + أبعاد صفريّها = ن[23]

---

[22] استحضر أن $أ^{\top}أ$ و $أأ^{\top}$ أشباه موجبة محددة فلذا قيمهم الذاتية غير سلبية ولذا تجذيرها دائما معرفة

[23] وهذه النتيجة عادة يُطلع عليها نظرية الرتبة الصفرية

4. إن كان أ = و س ف$^{\top}$ وهو تحليل قيمها الشاذة (تقش) فإن أعمدة "و" و "ف" تشكل قواعد (أصولا) متعامدة للفضاءات الجزئية الأساسية الأربعة للمصفوفة أ

| الفضاء الجزئي | الأعمدة |
|---|---|
| مدى (أ) | أول أعمدة و الرائية [24] |
| مدى منقول (أ) | أول أعمدة ف الرائية |
| صفريُّ منقول (أ) \ صفريُّ (أ$^{\top}$) | آخر أعمدة من ميمٍ الى راء للمصفوفة و |
| صفريُّ (أ) | آخر أعمدة من ميمٍ الى راء للمصفوفة ف |

حيث راء هو رتبة (أ)

برهانٌ

أ. فلتكن ألفاتٌ [أ$_1$ ...أ$_م$] صفوف أ فعليه:

كون س ∋ صفري (أ) يعني أ س = ٠ ويعني أن منقول أي صفٍّ في س يساوي صفرا وعليه فتركيبها الخطي (ز$_1$ أ$_1$ + ... + ز$_م$ أ$_م$)س$^{\top}$ = ٠ لكل م (ح)

وعليه فأي متجه من منقول أ ضربَ س = ٠ وختامها فإن س ∋ مدى (أ$^{\top}$)$^{\perp}$

وذلك يثبت النتيجة

*Proof.* (i) Let $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ denote the rows of $\mathbf{A}$. Then

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in \operatorname{null}(\mathbf{A}) &\iff \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\iff \mathbf{a}_i^{\top}\mathbf{x} = 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, m \\
&\iff (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{a}_m)^{\top}\mathbf{x} = 0 \text{ for all } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \\
&\iff \mathbf{v}^{\top}\mathbf{x} = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in \operatorname{range}(\mathbf{A}^{\top}) \\
&\iff \mathbf{x} \in \operatorname{range}(\mathbf{A}^{\top})^{\perp}
\end{aligned}$$

ب. تذكر النتائج السابقة للمتممات المتعامدة: فإن كان ص فضاءا جزئيا منتهي الأبعاد لـ ف فعليه فإن ف = ذا الفضاء مجموعا مباشرا ⊕ مع معامده ف = ص ⊕ ص$^{\perp}$ وعليه فالتقرير السابق يُستنتج من الفقرة السابقة (خذ ف = ح$^{ن}$ و ص = مدى منقول (أ))

ج. تذكر أنه ان كان "و" و "ك" فضاءين جزئيين لفضاء متجهي منتهِ الأبعاد "ف" فإن مجموعهما المباشر يساوي جمع بُعدي السابقين وعليه فيُكمل التقرير من الفقرة السابقة مستعملا حقيقة أن بُعدَ مدى (أ) يساوي بُعد منقولها

---

[24] س: أحيانا نسبة الرقم بدل ذكر رمزه أسميها هكذا مثالٌ: ر من الأعمدة ← أعمدة رائية نسبةً للرقم وعليه فقس.

ونتيجة مباشرةً للفقرة ب أن كل س في ح ن يمكن كتابتها متميِّزةً على صيغة:

س = أ^ت ف + ك

لبعض المتجهات ف و ك في ح ن حيث أ ك = ٠

ولاحظ أن بعض التناظر يظهر في هذه النظرية ونتائج مماثلة تظهر إن طبقناها على منقول أ

## المؤثر و مصفوفة النُّظُم (جمع نظيم)

إذا كان ف و ي فضاءا متجهٍ فإن مجموعة التطبيقات الخطية من الأول للثاني يكوّن فضاءا متجها آخرَ وأما النُّظُمُ المعرفة على السابقين يُحدثُ نظيما على هذا الفضاء من التطبيقات الخطية. فليكن ت تطبيقا من الأول للثاني بين الفضاءات النظمية السابقة فإن **التحويل الناظمي (المؤثر العادي)** معرف كالتالي:

||ت||عادي = أكبر ||ت س||ي على ||س||ف حيث أن س من الفضاء ف وليس صفريا

$$\|T\|_{\text{op}} = \max_{\substack{\mathbf{x}\in V \\ \mathbf{x}\neq \mathbf{0}}} \frac{\|T\mathbf{x}\|_W}{\|\mathbf{x}\|_V}$$

فئة مهمة (صف مهم) لهذا التعريف العامّ حيث منطلقه ومجاله المقابل [25] (مستقرها) فضاءا بعده نون وميم واما نظيمه البائي (ن-ب) فيستعمل فيهما فنه فإن مصفوفة بتلكم البعدين يمكن تعريف نظيمها البائي

|| أ ||ب = أكبر ||جداءها بمتجه س ||ب مقسوما على ||س||ب حيث س ليس صفريا

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x}\neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$$

وفي خاصة الحالات التي يساوي فيها ب واحدا أو اثنين أو غير منتهٍ (هتن[26]) فأولها يساوي جمع عناصر المصفوفة مطلقين صفيا والهتن شاقوليا أو عموديا والثاني فتساوي أكبر قيمة شاذة

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1(\mathbf{A})$$

---

[25] س: يحسن التنبيه على هذا المصطلح codomain وهو المجال المقابل للدالة وهي مجموعة تحوي وقد تساوي عناصر مجال الدالّة وهي المستقر والمدى للدالة

[26] والهتن في اللغة تتابع الأمطار ولعله لا بأس بإطلاقه على غير المنته لقرب المعنى وكذا عملا بقاعدة قلب حروف ما أريد ذكر عكسه وسبق شرحها

حيث $\sigma_1$ تساوي أكبر قيمةٍ شاذة وانظر نثرهم السابق وأما الثانية المحدثة (وتُسمى **نظيما طيفيا**) فميسور[27] $\sigma_1$ لها من خصائص خوارج قسمة ريلي السابقة وضوحا:

$$\arg\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \arg\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \arg\max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{Ax}}{\mathbf{x}^\top\mathbf{x}}$$

ورأينا أن الطرف الأيمن أعظم ما يكون بالمتجهات الذاتية لجداء المصفوفة أ في منقولها مقابلة أكبر قيمها الذاتية $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \sigma_1^2(\mathbf{A})$.

وبالتعريف فإن نظم المصفوفة مستنتجا لديها الصفة المهمة التالية:

أن جداءها مع س ثم نظيم البائي يساوي أو أصغر من توزيعه عليهما

$$\|\mathbf{Ax}\|_p \le \|\mathbf{A}\|_p\|\mathbf{x}\|_p$$

لكل س فإن هناك **مجموعة جزئية ضربية submultiplicative** بالمفهوم التالي.

القضية الثامنة:

النظيم البائي جداء مصفوفتين يساوي أو أصغر من توزيعها عليهما $\|\mathbf{AB}\|_p \le \|\mathbf{A}\|_p\|\mathbf{B}\|_p$

وبرهان ذلك: أن لكل س من السابق الذكر أصغر من جداءه معهما ومنه فإن الجداء يساوي أكبر س غير صفرية تعطي علاقة القسمة بينهما وبينه وهذا أصغر من الجانب الجديد وباختصار س مع التي في المقام ينتج جواب البرهان

*Proof.* For any $\mathbf{x}$,

$$\|\mathbf{ABx}\|_p \le \|\mathbf{A}\|_p\|\mathbf{Bx}\|_p \le \|\mathbf{A}\|_p\|\mathbf{B}\|_p\|\mathbf{x}\|_p$$

so

$$\|\mathbf{AB}\|_p = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{ABx}\|}{\|\mathbf{x}\|_p} \le \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\|_p\|\mathbf{B}\|_p\|\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \|\mathbf{A}\|_p\|\mathbf{B}\|_p$$

وهذه ليست نظم المصفوفة فقط فمن كثير استخدامه **نظيم فروبينيوس** ||أ||ف

وهو اقليدي ولكن يتشكل (يصاغ) أيضا بجذر جمع أثر جداءها بمنقولها وكذا جذر النظيم الطيفي على أصغر عدد في البعدين

$$\|\mathbf{A}\|_{\text{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2(\mathbf{A})}$$

وكلها معلومة من ضرب المصفوفات (جداءها) إلا ثالثها فتستنتج من تعويض أ بتحليلها ذي القيمة الشاذة ثم باختصار ف (باستعمال التدوير للآثار وتعامد ف) فنها يبقى أثر ق بمنقولها والذي يساوي السابق الثالث

---

[27] مرادفات يَسِر (اسم):زَهِيد , سَلِس , سَهْل , طَفِيف , عَزِيز , قَليل , قَلِيل , لَمَام , مَيْسُور , نَادِر , نَزْر , نُتْفَة

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^\top\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top) = \mathrm{tr}(\mathbf{V}^\top\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^\top\boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^\top\boldsymbol{\Sigma}) = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2(\mathbf{A})$$

نظيم المصفوفة يسمى **عنصرا ثابتا واحديا unitary invariant** إن كان نظيم و وفاء عليه يمينا يسار يساوي نظيمه

$$\|\mathbf{UAV}\| = \|\mathbf{A}\|$$

لكل مصفوفتين ذاتا حجمٍ صحيح وذا العنصر معتمد بشدة وفقط على القيم الشاذة للمصفوفة حيث أن نظيمها يساوي نظيم تحليلها والذي يساوي ق. وقد رأينا نظيمين الطيفي والفروبينيوسي يُمكن عرضهما من خلال قيمها الشاذة

القضية التاسعة:

النظيم الطيفي والفروبينيوسي عنصران ثابتان وبرهان الثاني

أن أثر [(و أ ف)⊤(و أ ف)] = (ف⊤ أ⊤ و⊤ و أ ف) = أثر(ف⊤ ف أ⊤ أ) وتساوي أثر أ مجدوءة بمنقولها

وأما الطيفي فبرهانه: مستحضرا أن ||و س||٢ = ||س||٢ لكل و متعامد وعليه فإن

||و أ ف||٢ = ... = ... = ... = ||أ||٢

$$\|\mathbf{UAV}\|_2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{UAVx}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{AVx}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ay}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2$$

حيث استعملنا تغير ص = ف⊤ س والذي يحقق مساواة نظيم س و ص الثاني حيث ف⊤ غير معكوس والثانيين متقابلان (تقابل واحدٍ لواحد) وبالخاص ص = ٠ فقط عن تصفّر س وعليه فإن تعظيم (تكبير-تزويد-تكبير) ص غير الصفرية مكافئ لذلك سينيا

## تقريب دَنيُّ الرتبة (صغير)

إن التقريب دنيّ الرتبة من أهم تطبيقات التقش (تفريق القيمي الشاذ) العملية للمصفوفات حيث أن المصفوفة المُقدرة نريد أن نوجد بنفس أبعادها ولكن برتبة أقل[28] بحيث يكونان قريبين (متشابهين) حسبَ نظيم معيّن. فهذا التقريب مفيد أن يقلل كمية البيانات المحتاجِ لها لتخزين المصفوفة مع بقاء أغلب معلوماتها.

وننوه لمستحق باسم نظرية إكارت ويونغ والمرسكي التي توضح (تخبر) أن القيمة الأمثل يُمكن حسابها بسهولة من التقش طالما أن النظيم ثابت غير متغير (مثل النظيم الطيفي وكذا الفروبينيوسيّ).

النظرية الخامسة: ليكن ||.|| نظيما مصفوفيا غير متغير وافرض أ مصفوفة صفوفها عدّتها رمزها الميم وأعمدتها النون حيث الأول أكبر من الثاني أو يساويه فلها تقش $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$ فيكون أحسن تقريبٍ عدّتها الكاف لها حيث الكاف أقل من رتبة المصفوفة رتبة(أ) بـ:

[28] س: الرتبة كما في المعجم "هي العدد الأعظميّ للصفوف المستقلة خطيًّا" ص٥٧٩

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$$

على مفهوم (بقاء الآتي):

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\| \leq \|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|$$

لكل أ˜ بنفس أبعاد أ ولها رتبة أقل من الكاف.
إن إثبات (برهنة) الحالة العامّة يتطلّب جهدا جهيدا وعليه فسنبرهن حالةً خاصة نظيمها الطيفيّ فقط
فأولا نحسب الفرق بين المُقَّربة والأصلية (فعليا هي ما يبقى)

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top \right\|_2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top \right\|_2 = \sigma_{k+1}$$

ولتكن أ˜ كما سبق فبحسب النظرية العامة للجبر الخطي فإن بُعد صفريّ (أ˜) يساوي الميمَ مطروحا منها رتبة أ˜ الأكبر ن-ك أو تساويه.

$$\dim \operatorname{null}(\tilde{\mathbf{A}}) = n - \operatorname{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) \geq n - k$$

والتي يتبعها أن صفري أ˜ مقاطعا بسطة {ف١ ، ... ف ك+١ } غير تافه (فيها عنصر ليس صفريًّا) إذ بغير ذلك فسيكون على الأقل (ن-ك) + (ك+١) = ن + ١ عدد المتجهات المستقلة في البعد النوني وهو مستحيل وعليه فاجعل ز أي عتصر من التقاطع له نظيم ثنائي وحدوي (=١) بتوسيعه $\mathbf{z} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}$ المنتجة أن ١ = ||ز||٢ ٢

$$1 = \|\mathbf{z}\|_2^2 = \|\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}\|_2^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{k+1}^2$$

وبقاعدة فيثاغورس:

by the Pythagorean theorem. Thus

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{A}}\|_2 &\geq \|(\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{A}})\mathbf{z}\|_2 && \text{by def., and } \|\mathbf{z}\|_2 = 1 \\
&= \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_2 && \mathbf{z} \in \text{null}(\tilde{\mathbf{A}}) \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top \mathbf{z} \right\|_2 \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i \alpha_i \mathbf{u}_i \right\|_2 \\
&= \sqrt{(\sigma_1\alpha_1)^2 + \cdots + (\sigma_{k+1}\alpha_{k+1})^2} && \text{Pythagorean theorem again} \\
&\geq \sigma_{k+1}\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{k+1}^2} && \sigma_{k+1} \leq \sigma_i \text{ for } i \leq k \\
&= \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2 && \text{using our earlier results}
\end{aligned}$$

as was to be shown.

وتحسب جودة التقريب بالعلاقة النسبية

$$\frac{\|\mathbf{A}_k\|_F^2}{\|\mathbf{A}\|_F^2} = \frac{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2}{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$$

## شبه المنعكسات

إن كانت أ بعداها ميم ونون غير متساويين فإن هذه المصفوفة لا يمكن أن تُعكس ولكنّ هناك تعميما باسم شبه معكوس مور وبنروز المرموز له أ$^+$ بمقلوب أبعاد أ والتي دائما تُعرّف بالخصائص التالية:

1. أن جداءها مع نفسها هي نفسها والعكس
2. جداءها مع شبيه معكوسها والعكس

(i) $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A}$

(ii) $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger$

(iii) $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ is symmetric

(iv) $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ is symmetric

أ معكوسة فإذا أ+ = معكوسها فيأتي من تفشها ان كان أ $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ فإن شبه عكسها

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^\dagger\mathbf{U}^\top$$

حيث الوسطى بها تحسب من أختها السابقة بنقلها وعكس غير الصفريات على القطر.

تبيين وعرض وموافقة خصائص المصفوفة لشبه معكوسها سهل ويُترك كتمرين للقارئ (gg)

## بعض المصفوفات المتطابقة

### جداء المصفوفة بالمتجه كتركيب من أعمدة المصفوفة

فرضية ١٠ فليكن س ذو بعد نوني متجها وأ مصفوفة ذات بعدين ميمي ونون مصفوفةً أعمدتها أ١ ... أن جداءهما جداء المصفوفة في الأعمدة

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i$$

وهذا من أهم الخصائص لفهم العلاقات والعمليات الجبرية على المصفوفات وأعمدتها وبرهان ذلك يسير باعتبار أن كل عنصر بمفرده ومتوسع بالتعريف) وهذا تدريب لطيف للقارئ

### مجموع الجداءات الخارجية كجداء مصفوفتين

**الجداء الخارجي** تعبير على صيغة جدخر متجهين بعد الأول ميمي والثاني نون وواضح أنهما بعدا المصفوفة ولكنه غير واضح ولكن جمعَ الجداءين الخارجيين مكافي لجداء مصفوفتين

**Proposition 11.** *Let* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^m$ *and* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$. *Then*

$$\sum_{\ell=1}^{k} \mathbf{a}_\ell \mathbf{b}_\ell^\top = \mathbf{A}\mathbf{B}^\top$$

*where*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_k \end{bmatrix}$$

*Proof.* For each $(i, j)$, we have

$$\left[\sum_{\ell=1}^{k} \mathbf{a}_\ell \mathbf{b}_\ell^\top\right]_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} [\mathbf{a}_\ell \mathbf{b}_\ell^\top]_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} [\mathbf{a}_\ell]_i [\mathbf{b}_\ell]_j = \sum_{\ell=1}^{k} A_{i\ell} B_{j\ell}$$

وواضح أن هذه العلاقة هي جداء داخلي

This last expression should be recognized as an inner product between the $i$th row of $\mathbf{A}$ and the $j$th row of $\mathbf{B}$, or equivalently the $j$th column of $\mathbf{B}^\top$. Hence by the definition of matrix multiplication, it is equal to $[\mathbf{A}\mathbf{B}^\top]_{ij}$. □

### الصيغ التربيعية

بأن مصفوفة أ ذات بعدٍ نوني وهي متناظرة وتذكر صيغة التربيع $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ ففي بعض الحالات يحسن كتابتها بالنسبة لكل عنصر صانعٍ لـ أ و س

$$\mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j$$

وهذه المتطابقة صالحة لأي مصفوفة مربعة وليس ضروريا أن تكون متناظرة بالرغم من أن الصيغ التربيعية عادة تناقش في سياقات المصفوفات المتناظرة.

## الحُسبَان[29] والاستمثال

غالب التعالئ[30] يتمحور حول تصغير **الدالّة الموضوعية** (أو الدالة المُكلفة أو دالة الكلفة) وهي سُلّمّيّةٍ لعدّة (أي مدخلها عدّة متغيّرات ومخرجها رقم واحد) تقيس (تحسب) أداء نموذجها واستيعابه للبيانات (المعطيات).

### القصيويّة[31]

مدار الاستمثال على إيجاد القيمة القصوى للدالّة سواءً كانت عظمى أو صُغرى ويعتمدُ ذا على حسْبِ مقصود التطبيق، ومن المهم تعريف المعطيات (المُدخلات) على ما نريد استمثاله. وهذه المجموعة س ⊇ دⁿ تُسمّى **مجموعةً مُجدية** وإن كانت تلك المجموعة كُلّ مجال (منطلق) الدالة المُستمثلة (وهذا المعتاد عندنا) فنسمي مسألتنا **غير مقيّدة** وإلا فعكسه تكون عادةً صعبة الحل، واعتمادا على طبيعة المُجدية.

فافرض دالّة د:حⁿ←ح فالنقطة س تسمى قيمةً صغرى محلّية (وعكسه عظمى [أو كبرى عندي]) لتي الدالة في المجدية إن كانت قيمتها في الدالة أقل من عدد ص أو يساويه $\text{if } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ لكل الصادات ا٠لمجاورة من محدود ك⊇س حول س[32] ولكن إن كانت الصادات شاملةً كل المجدية فتصير س قيمة صغرى شاملة في المجدية ولعل المصطلح أنه في المجدية يُشكل فاعلم أننا نستمثل على منطلق (مجال) الدالّة.

الفعليّة هو نعت (وصف) (كم١٠ في قيمة صغرى فعليّة) يعني أن التعريف السابق نُزعت منه المساواة ويُنتج أن القصيويّة فردانيّة (وحدانيّة) بين جيرانها.

---

[29] أحببت تسميتها هكذا لأنها كلمة واحدة وبعدُ تضاف للتفاضل والتكامل

[30] التعالؤ (إن أرجعناها صرفيًّا علاً تعالأ الخ) هو نحت صنعته اختصارا لتعلّم الآلة وهو مصطلح في الصدر منه شيء يُمكن استبداله بتعلّم محوسب (ويصير اختصاره لحسبة تصريفها لَحْسَبَ) أو إن شئتَ تدقيقا فقلْ تعلّم مُرَقمن لأن أوّله وآخره أرقامٌ تُدَوزن

[31] وهي قيمة الدالّة القصوى

[32] قال المصنف: وهي مجموعة مفتوحة تتضمّن س (وهي المجاورات أو الجيران)

أدرك أن احتساب استعظام دالة هو هو استصغارها ولكن سالبا فيُساق هذا في صياغة هذا معمّما بلا التباس وهذا الوضع لا يحيجنا لتبيين ما نستعمله منهما منفصلتين.

## التدرج

**التدرج** أهم مفهوم يُؤتى به من حسبان التفاضل. فالمتدرّجات تُعمّم المشتقات من دوال سلّمية إلى متعددة ويُرمز لتدرج دالّة د:ح $^{\text{ن}}$←ح بـ ∇د كالتالي[33]:

$$\nabla \text{د} = \begin{bmatrix} \frac{\text{ءد}}{\text{ءس}_{١}} \\ \cdots \\ \frac{\text{ءد}}{\text{ءس}_{\text{ن}}} \end{bmatrix} \text{ ، } [\nabla \text{د}] = \frac{\text{ءد}}{\text{ءس}_{\text{ن}}}$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{i.e.} \quad [\nabla f]_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ولديها الخاصية المفيدة أن المشتق ∇د(س) يؤشر على **طريق الصعود الأكبر** من س وعكسها **لانحداره**. وسنستعمل هذا عند استصغار الدالة تكراريا من خلال **الانحدار المتدرج**.

## اليعقوبيّة

يعقوبيُّ الدالّة د: ح $^{\text{ن}}$ ← ح $^{\text{م}}$ هو مصفوفة من المشتقات الأولى (ذات مرتبة أولى):

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{i.e.} \quad [\mathbf{J}_f]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

وعندما تكون قيمة م واحدا يصير التدرّج مساوياً لمنقول اليعقوبيّة

## الهسّيّة

**هسّيّة** مصفوفة الدالّة د: ح $^{\text{د}}$ ← ح هو مصفوفة المشتقات الثانية (ذات الدرجة الثانية)

---

[33] وليعلم القارئ أن الاشتقاق الجزئي يُرمز له في الكلزيّة بحرف d معوجٍّ وأنا في العربيّة أكتبه بهمزة ء دلالة على جزءي (للمزيد انظر الرابط)

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2} \end{bmatrix} \quad \text{i.e.} \quad [\nabla^2 f]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

وتذكر إن كانت المشتقات الجزئية متّصلةً فإن درجة الاشتقاق يمكن أن تتبادل (نظرية كليرو) وعليه فالمصفوفة الهسيّة ستتناظر. وبالمجمل هي غالب ما نتعامل معه.

والهسّيّة تستعمل في بعضِ خرزمات الاستمثال كطريقة نيتن[34]. هي مُكلفةٌ لتُحسَب ولكن تُقَصِّرُ عدد التكرارات المحتاجة لتتقارب الدالة لقيمة محليّة صغرى بإعطاء معلومات عن تقوّس الدالة.

## حُسبان المصفوفات

تقل النقطات التي تُستمثل عند مضمحلّات المتدرجات فإنه يفيد أن يكون عندنا قواعد اشتقاقية ترميزيّة للمصفوفات والمتّجهات. نعطي أشهرها هنا والأغلب أن أشهرها وأهمّها لمقاصدنا:

▽س (أ$^{\top}$س) = أ

▽س (س$^{\top}$أ س) = (أ$^{\top}$+أ)س

وانتبه أن الثانية تنطبق على مصفوفة مربّعة وإن كانت متناظرة فتتبسّط الى ٢ أس

### قاعدة السلسلة

معظم الدوالّ التي نستمثلها ليست دوالًّا بسيطة بل مركّبة منها مما نعرف معالجته وقاعدة السلسلة تعطي طريقة لاشتقاق الدوالّ المركبة من مشتقات مركباتها التي كوّنتها.

كمثال للقاعدة لدالّة ذات متغيّر واحد:

(دoج)ْ(س)=دْ(ج(س)) جْ(س)

حيث تعبّر الدائرة على تركيب الدالّة وهناك تعميم طبيعيّ لهذه القاعدة للدوالّ عديدة المتغيّرات:

القضية الثانية عشرة: فلتكن: د: ح$^{م}$ ← ح$^{ك}$ ولتكن ج: ح$^{ن}$ ← ح$^{م}$ فيكون التركيب د∘ج:ح$^{م}$ ← ح$^{ك}$ ويعقوبيّها:

ي$_{د∘ج}$(س)=ي$_{د}$(ج(س)) ي$_{ج}$(س)

**Proposition 12.** *Suppose* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *and* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Then* $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *and*

$$\mathbf{J}_{f \circ g}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_f(g(\mathbf{x}))\mathbf{J}_g(\mathbf{x})$$

---

[34] خرزمات جمع خرزمة (وهي جذر ابتكرتها لاستعماله مع "الخوارزميّات" حيث يصير خَرْزَمَ) وأما نيتن فعندي هي أسلم وأعرب من نيوتن اذ هي على وزن فعلل/فيعل

وفي حالة أن الكاف تساوي واحدا فعندنا أن المتدرّجَ يساوي منقول يعقوبيّة الدالة د

فنتيجة (لازمتها) الأولى: د:ح^م ←ح ولتكن ج:ح^ن ←ح^م فتركيبهما د∘ج:ح^ن←ح ومشتقهُ:

▽ ( د∘ج) (س) = ي_ج (س)^⊤ ▽د (ج (س))

$$\textit{Suppose } f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \textit{ and } g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m. \textit{ Then } f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \textit{ and}$$

$$\nabla(f \circ g)(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^\top \nabla f(g(\mathbf{x}))$$

## نظرية تيّلر

وهذه النظريّة لها طبيعةٌ تُعَمَّمُ على الدوال المتعدّدة المتغيّرات ونعرض ذلك:

النظرية السادسة: (نظريّة تيلر) افرض د:ح^ك ←ح متّصلة منشقة وادخل هـ من ح^ك فسيوجد ت في (٠،١ ) حيثُ:

د(س+هـ) = د(س) + مشتق د(س+ت هـ)^منقول هـ

وزِد عليه إن كانت هذه الدالّة متصلة منشقة مرّتين

▽د(س) = ▽د(س) + ∫_٠^١ ▽^٢ د(س+ت هـ)هـ مـ(ت)[35]

فسيوجد ت في (٠، ١ ) حيثُ:

د(س+هـ) = د(س) + ▽ د(س+ت هـ)^منقول هـ + ١/٢ هـ^منقول ▽^٢ د(س+ت هـ)هـ

وتُستعمل هذه النظريّة في البراهين حول شروط القيمة المحليّة الصغرى لمسائل المُستَمثلات غير المشروطة (المقيّدة). وبعضُ أهمّ نتائجها عُرِضَت في القسم (المقطع) الآتي إن شاء الله.

## شروط القيمة المحليّة الصغرى

القضية الثالثة عشرة: إن كان س* قيمة محليّة صغرى لـ د وكانت د متصلة منشقة حول جيران س^* فإن

د(س*)= ٠

برهانها: فلتكن س^* قيمةً محلية صغرى لـ د وافترض تناقضا د(س*) ≠٠ . واجعل هـ = -▽د(س^*) وانتبه أنه باتصال مشتقها لدينا:

نـهـا_{ت←٠} -▽د(س*+ت هـ) = -▽د(س*) = هـ

وعليه:

---

[35] هذا الرمز مـ(ت) بدلٌ عن dt

نـهـا$_{ت\leftarrow ٠}$ هـ$^{\top}$▽د(س*+ت هـ) = هـ$^{\top}$▽د(س*) = -||هـ||$_{٢}^{٢}$ < ٠

وعليه فإنه يوجد ح>٠ حيث هـ$^{\top}$▽د(س*+ت هـ) < ٠ لكل ت∈[٠،ح]والآن طبّق نظريّة تيلر: لكل ت∈(٠،ح] فسيوجد تْ∈(٠،ت) بحيثُ:

▽د(س*+ت هـ)=د(س*)+ت هـ$^{\top}$▽د(س*+تْ هـ) < د(س*)

وطالما هذه س* ليست قيمةً محليّة صغرى فسيتناقض وعليه فلا بُدَّ د(س*)=٠

وهذا البرهان يُظهر لما اضمحلال المتدرّج مهمٌّ للقصيويّة فإنْ كانت د(س) غير صفريّة فسيوجد مكفيّةً خطوةً خ>٠ بحيثُ د(س-خ▽د(س))<د(س) ومنه سمّينا -د(س) **اتّجاهَ النزول**

وتُسمّى النقاط التي يضمحل عندها المتدرّج **نقاطًا مستقرّة** والحظ وانتبه أن لّيست كلها قصيوية نخذ مثالا د:ح$^{٢}$←ح من الدالّة د(س،ص)=س$^{٢}$+ص$^{٢}$. فلدينا مشتقّها ▽د(٠)=٠ ولكن هذه النقطة صغرى على الخط حيثُ ص=٠ وعُظمى على الخط حيثُ س=٠. وعليه فليست قيمةً محلّيّة صغرى ولا عظمى لـ د. وهذه النقاط التي يضمحل عندها المتدرّج غير أنها ليست قصيويّة محليّة يكون اسمها **نقاطا سرجية**[36]**.**

فلدينا أن المتدرّج جوهريٌّ (مهم أو مركزي) لتشكيل وتوصيف الصغرى المحليّة ولكننا نبيّنُ أكثر بالهسيّة ونثبتُ أولا ضرورتها لها.

القضيّة الرابعة عشرة

إن كانت **س*** محليّة صغرى لـ د وكانت د متصّلة منشقّة مثنًى (مرّتين/مثنويّةً) حول(عند) جيران **س*** فإن ▽د(**س***) نصف معرفة.

البرهان (إثباتها): فلتكن **س*** محليّة صغرى لـ د وافترض تناقضا أن ▽$^{٢}$د(**س***) ليست موجبة نصفَ معرّفة. دعْ **هـ** تكن **هـ**$^{\top}$ ▽د(**س***)**هـ** < ٠ وباتّصال ▽$^{٢}$د(**س***) لدينا

نـهـا$_{ت\leftarrow ٠}$ -▽$^{٢}$د(س*+ت هـ) = -▽$^{٢}$د(**س***)

فعليه:

نـهـا$_{ت\leftarrow ٠}$ هـ$^{\top}$▽$^{٢}$د(**س***+ت هـ) = هـ$^{\top}$▽د(**س***) = -||هـ||$_{٢}^{٢}$ < ٠

وتوجد ح>٠حيثُ هـ$^{\top}$▽$^{٢}$د(**س***+ت **هـ**)**هـ** < ٠ لكل ت∈[٠،ح]. وطبّق نظريّة تيلر لكل **هـ** مع ||**هـ**||$_{٢}$ < ر فيوجد ت∈(٠،١) بحيثُ:

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + \underbrace{\mathbf{h}^{\top}\nabla f(\mathbf{x}^*)}_{0} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^{\top}\nabla^2 f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h})\mathbf{h} \geq f(\mathbf{x}^*)$$

د(**س***+**هـ**) = د(**س***)+هـ$^{\top}$▽د(**س***)+ $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\top}$▽$^{٢}$د(**س***+ت **هـ**)**هـ** ≥ د(**س***)

المتباينةُ الأخيرة تحمّلُ (تثبُتُ) لأن ▽$^{٢}$د(**س***+ت **هـ**) موجبة شبه منتهية (طالما ||ت **هـ**||$_{٢}$ = ت||**هـ**||$_{٢}$ < ||**هـ**||$_{٢}$ < ر) فإن

---

[36] انظر المعجم صـ٦١٣

هـ$^{\top}$ ▽$^{2}$د(**س***+ت **هـ**)**هـ** ≤ ٠ طالما د(**س***) ≥ د(**س***+**هـ**) لكل **هـ** بشرطِ < ر نستخلص أن **س*** محليّة صغرى.

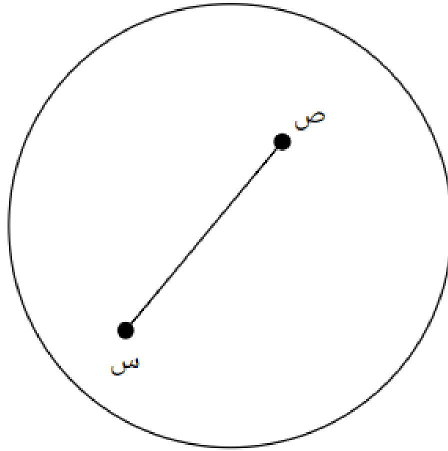
وزد عليه أن ▽$^{2}$د(**س***) جزمًا موجبة منتهية طالما أن الهسّية متصلة يُمكننا اختيار كُرَةٍ أخرى بْ بنصف قُطرٍ أكبر من الصفر متوسّطةً عند س* بحيثُ ▽$^{2}$د(**س***) موجبة منتهية لكل **س**∈بْ فعليهِ تبعًا لنفسِ البرهان السابق (باستثناء الفعلية فإن الهسية موجبة منتهية) د(**س***+**هـ**) > د(**س***) لكل **هـ** بشرط ٠ < ||**هـ**||$_{2}$ < رْ فإن **س*** محليّة صغرى فعليّة.

تنبّه أن الإتصاليّة وشرط المساواة د(**س***) = ٠ وأن المشتق الثاني موجبٌ شبه منتهٍ غيرُ كافية لضمان الصُغرويّة محلّيًّا عند **س***

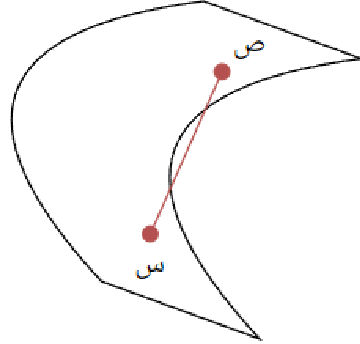
فقدّر الدالة د(س) = س$^{3}$ فمشتقها الأول والثاني عند الصفر صفرٌ (والهسّيّة هنا مصفوفة أحادية الصفوف والأعمدة ١×١ موجبة شبه منتهية) ولكن الدالة تَسرُج عند هذه النقطة(س=٠) فهي سرجية والدالة د(س)= -س$^{4}$ مناهضٌ أبشع فلها مثلما لتلك وعند س=٠ محليّة صغرى فعليّة لها.

ولذي الأسباب نشترط للهسيّة أن تبقى شبه منتهية طالما نتقارب من **س***. للأسف هذا غيرُ مجدٍ حسابُه حوسبيًّا وفي بعض الأحوال نؤكّده رقميّا (بإظهار أن المشتق الثاني موجبٌ شبه منتهٍ لكل **س**∈ℛ$^{د}$). وأيضا فإن ▽$^{2}$د(**س***) موجب منتهٍ فعليٌّ، وافتراض الإتصال للدالّة يقتضي ذا الشرط فلا داعيَ لنقلق.

وهذه صورة تبيّن تحدّبَ المجموعة من عدمه:




مجموعة محدبة




مجموعة غير محدبة

## التحدّب

وهو مصطلح واقعٌ على الدوالّ والمجموعات فللأولى تقبع درجات منه تخبّرنا بإسهاب عن صُغْرَوِيَّاتها أَمَوجُودةٌ أو أفِرادنيّةً وما سُرعة ايجادها مستعملينَ دوالّ الاستمثال وغير ذلك ونعرض في هذا القسمِ مسائل التحدّب القوي والفعلي باقتضابٍ.

### المجموعات المحدّبة

دعْ سو ⊆ ح^د تكن محدّبةً بشرط:

ت **س** + (١-ت)**ص** ∈ سو

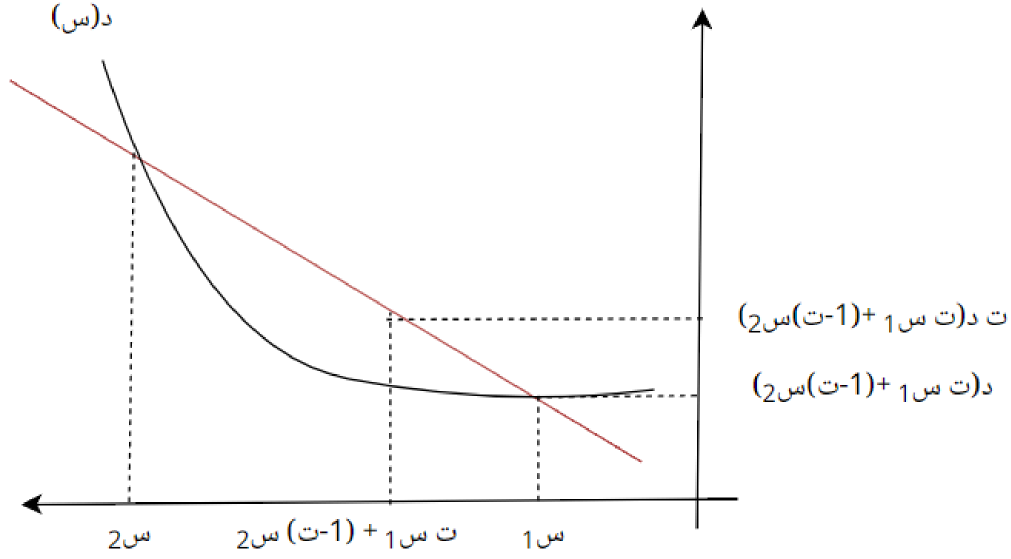
لكل **س**،**ص** ∈ سو وكلّ ت∈[٠،١]
هندسيًّا هذا يعني أن كل النقاط على الخط المقطوع بين أي نقطتين في سو أيضا في سو انظر الصورة السابقة.
وسبب اهتمامنا بكون المجموعة محدّبةً أنه ستأتي مسائل تعتمد اعتمادا شبه كلِّيّ قصيويّاتها عليها. واعلم أن مرضيَّ النتائج تظهر إن جعلنا المجموعة المجدية ثابتةً لذا فإن البراهين لابُدَّ من افتراض تحديبَ المجموعة ولحظّنا فعادةُ عملنا أن نستصغر حول ح^د والتي يظهر جليًّا تحديبُها.

### قواعد (أسس) الدوالّ المحدَّبة

في باقي هذا القسم افترض د:ح^د←ح طالما لم نحدد ونبدأ بالتعريف ثم نعرّج على أمثلتها.
الدالة تكون محدّبةً إذا

د(ت **س** + (١-ت)**ص**) ≤ ت د(**س**) + (١-ت)د(**ص**)

لكل **س**،**ص** ∈ مجال(د) ولكل ت∈[٠،١].




ما تبدو عليه الدالة المحدبة

إن تماسكت المتابينةُ فعليًّا (أي بلا مساواةٍ) لكل ت∋(٠، ١) وعند س≠ص فنُسَمِّيها **محدّبة فعليَّةً.**

والدالة تُسَمّى **محّدبة فعليًّا بالوسيط** م (أو حَدبُها ميميٌّ فعليًّا) بشرط أن تكون:

$$\text{س} \mapsto \text{د}(\text{س}) - \frac{\text{م}}{٢}\|\text{س}\|_{٢}^{٢}$$

**محدّبة.**

ذِكرُ هذه الشروط متدرّجُ القوى فالمحدّبة الفعلية تقتضي التحديب نفسَه.

وهندسيًّا فالتحديب يدل على أن القطعة المستقيمة التي بين نقطتين على بيانِ الدالة تقع أعلاه كما في البيان السابق.

التحديب الفعليُّ يعني أن القطعة المستقيمة لا بُدَّ (فعليًّا) فوق بيان الدالّة باستثناء نقطتي الطرفين.

نِتاج (منتوجات) التحديب

لماذا يُستشرف ويُتقافز لدالّة مُحدّبة؟

ترميزنا للمُحدَودِبَات له مُقتضيات حول طبيعةِ الصُغْرَويّات. وغيرُ مفاجئٍ أن الشروط المُشدّدة (الأقوى أو الأصلب) تُخبرنا المزيد حولها.

القضية السادسة عشرة: لتكنْ سـ مجموعة محدودبةً وإن كانت د (دالة) محدّبة فإن أي قيمة محليّة صغرى في الدالة موجودة في سـ هي أيضا صغرى شاملة.

برهانها: افرض د محدّبة ولتكن س* محليّة صغرى لها في سـ فإن لكل جارٍ ن∋سـ حول س* لدينا د(س) ≤ د(س*) لكل س في ن فسِرْ تلقاء تناقض أن توجد سْ في سـ بحيثُ د(سْ) > د(س*).

فلتكن قطعةً مستقيمة س(ت) = ت س* + (١-ت)سْ، ت∋[٠،١] منتبهًا أن س(ت)∋سـ بتحديب سـ فإنه بتحديب د،

د(س(ت)) ≥ ت د(س*) + (١-ت)د(سْ) > ت د(س*) + (١-ت)د(س*) = د(س*)

$$f(\mathbf{x}(t)) \leq tf(\mathbf{x}^*) + (1-t)f(\bar{\mathbf{x}}) < tf(\mathbf{x}^*) + (1-t)f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*)$$

لكل ت∋(٠،١).

يُمكننا اختيار ت متقاربةً للواحد بحيثُ س(ت)∋ن فإن د(س(ت)) ≤ د(س*) بتعريف ن ولكن د(س(ت)) < د(س*) لكل س∋سـ فإن س* صغرى شاملة لـسـ.

القضية السابعة عشرة: فلتكن سـ مجموعة محدّبة ولتكن د محدّبة فعليًّا فإنه سيوجد على الأكثر محليّة صغرى لـ د في سـ. وإن وُجدت فهي الصغرى الشاملة الوحيدة لـ د في سـ.

برهانها: الجملة الثانية تابعةً للأولى فلا بُدّ أن نثبت وجود المحليّة الصغرى فإن صار فهي وحيدة (مميّزة).

افرض س* محليّة صغرى لـ د في سـ وافترض طالبا تناقضا أن هناك سْ لا تساوي س* في سـ

طالما أن د محدّبة فعليًّا فهي محدّبة (تبعًا) فإن س* وسْ كلاهما صغرويّة شاملة لـ د في سـ حسبَ النتائج السابقة فعليه د(س*) = د(سْ) واعتبر القطعة المتسقيمة س(ت) = ت س* + (١-ت)سْ،ت∋[٠،١] ولا بُدّ أن تستوي في سـ كاملةً وبفعليّة تحدّب د،

د(س(ت)) ≥ ت د(س*) + (١-ت)د(سْ) > ت د(س*) + (١-ت)د(س*) = د(س*)

$$f(\mathbf{x}(t)) < tf(\mathbf{x}^*) + (1-t)f(\bar{\mathbf{x}}) = tf(\mathbf{x}^*) + (1-t)f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*)$$

لكل ت∋[٠،١] ولكنّ هذا تناقضُ بحقيقة أن س* صغرى شاملة ولا بد من التساوي مع سْ فثبتت الميزة.

اعتبر الدالّة د(س) = س$^{٢}$ والتي هي محدّبة فعليًّا شاملتها الصغرى س=٠ في ح ولكن انظر ما يحدث ان غيّرنا إجداء (جداية) المجموعة سـ.

(١) سـ={١}: وهذه المجموعة في الواقع محدّبة فما زال عندنا صغرى شاملة ولكنّها ليست نفْسَ غير المشروطة.

(٢) سـ=ح/{٠}: وهذه غير محدّبة ولا صغرى فيها بحيث عند أي نقطة تُلفِ ما يَصغُرُ عنها في الدالّة د(ص)< د(س).

(٣) سـ = (-∞،-١] ∪ [١،∞) وهذه غير محدّبة فإن هناك محلّيّتان صغريَان (س=±١).

إظهار تحديب الدالّة

مرجوٌّ أن تُقنعَ القارئَ الفقرة السابقة بأهميّة التحديب والآن نلتفتُ لاثبات هذه الخاصيّة للدالة هذا إن أمكَن بتبيين أن شروط التعريف منطبقة وهذا أمر صعبُ.

القضية الثامنة عشرة. النُظُم (جمع نظيم) محدّبة.

إثباتها: فلتكن ||٠|| نظيم فضاءٍ متجهيّ ف‍و فإن لكل **س،ص** في ف‍و و ت∈[٠،١]،

||ت س+ (١-ت)ص|| ≤ ||ت س|| + ||(١-ت)ص|| = |ت| ||س|| + |١-ت| ||ص|| = ت||س|| + (١-ت)||ص||

$$\|t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}\| \le \|t\mathbf{x}\| + \|(1-t)\mathbf{y}\| = |t|\|\mathbf{x}\| + |1-t|\|\mathbf{y}\| = t\|\mathbf{x}\| + (1-t)\|\mathbf{y}\|$$

وقد استعملنا المتابينة المثلثية وتجانس (homogeneity) النظم وحقيقة أن ت و (١-ت) غير سوالب فعليه ||٠|| محدّبة.

القضية التاسعة عشرة افرض د منشقّة فعليه فإنها محدّبة فقط إذا

د(س) ≤ د(ص) + ⟨▽د(ص)، س-ص⟩

لكل س،ص∈مدى(د).

برهانها (⇐) افرض د محدّبةً فَعَلَيْهِ:

د(ت س + (١-ف)ص <= ت د(س) + (١-ت)د(ص) = د(ص) + ت(د(س)-د(ص))

لكل س،ص في مجال د ولكل ت∈[٠،١] فإعادة ترتيبها:

(د(ص+ت(س−ص))−د(ص)) / ت <= د(س) - د(ص)

وعند تقارب ت ← ٠ الطرف الأيمن يُصبح ⟨▽د(ص)، س-ص⟩ فالنتيجة (افرض عكس الاقتضاء ⇒)

د(س) >= د(ص) + ⟨▽د(ص)، س-ص⟩

لكل س،ص في مجال د ثبّتهما فيه مع شرط ت وعرّف ع=ت س + (١-ت)ص فمنهُ:

د(س) => د(ع) + ⟨▽د(ع)، س-ع⟩

د(ص) => د(ع) + ⟨▽د(ع)، ص-ع⟩

فعليه:

ت د(س) + (١-ت)د(ص) >= ت(د(ع) + ⟨▽د(ع)، س-ع⟩) + (١-ت) (د(ع)+⟨▽د(ع)، ص-ع⟩)

= د(ع) +⟨▽د(ع)، ت(س-ع)+(١-ت)(ص-ع)⟩

= د(ت س+ (١-ت)ص + ⟨▽د(ع)، ت س+(١-ت)ص-ع⟩=٠

= د(ت س + (١-ت)ص

يقتضي أن الدالة د محدّبة.

القضية العشرون: افرض د منشقة مثنى فعليه:

(١) د محدّبة فقد ان كان $\nabla^{2}$د(س) ≽ ٠ لكل س في مجال د

(٢) إن كانت $\nabla^{2}$د(س) ≻٠لكل س في مجال د فإن د محدّبة فعليًّا.

(٣) يكُنْ حدْبُ (تحدّب) د ميمًّا فعليًّا فقط إن كان $\nabla^{2}$د(س) ≽ مع (ع هو العنصر المحايد) لكل س في مجال د.

إثباتها متروك 🙂

القضية الحادية والعشرين: إن كانت د محدّبة وكان ﻫ >= فإن ﻫد محدّبة.

برهانها: بالتعويض في تعريف التحدّب يكن كل س،ص في مستقر(د) = مُنطلق(د)،

(ﻫد)(ف س+(١-ت)ص) = ﻫد(ت س+(١-ت)ص)

=> ﻫ(ت د(س) + (١-ت)د(ص))

= ت(ﻫد(س)) + (١-ت)(ﻫد(ص))

= ت(ﻫد)(س) + (١-ت)(ﻫد(ص))

فإن د محدّبة.

القضية الثانية والعشرين إن كانت د و ج محدّبتين فإن د+ج محدّبٌ وإن كانت ج محدبة فعليا فإن د+ج محدبة فعليا وإن كانت لها تحدّب ميمي فإن د+ج كذلك.

برهانها: افرض د و ج محدّبتان فلكل س،ص∋منطلق(د+ج)=مستقر(د) ∩ مستقر(ج)،

(د+ج)(ت س+(١-ت)ص) = د(ت س+(١-ت)ص+ج(ت س+(١-ت)ص)

=< ت د(س) + (١-ت)د(ص) + ج(ت س+(١-ت)ص) [تحديب د]

=< ت د(س) + (١-ت)د(ص) + ت ج(س) + (١-ت)ج(ص) [تحديب ج]

= ت(د(س) + ج(س)) + (١-ت)(د(ص)+ج(ص))

=ت(د+ج)(س) +(١-ت)(د+ج)(ص)

فإن د+ج محدّبتان.

وإن كانت ج محدبة فعليا فثاني المتباينات أعلاه تحتمل الفعليّة س ≠ ص و ت∋(٠،١) فإن د+ج محدبة فعليا.

وإن كانت ج لها تحدّب ميمي فإن ﻫ(س) ≡ ج(س) - $\frac{م}{٢}\|س\|_{٢}^{٢}$ محمدبة فإن د+ﻫ محدبة ولكن

(د+ﻫ)(س) ≡ د(س) + ﻫ(س) ≡ د(س) + ج(س) - $\frac{م}{٢}\|س\|_{٢}^{٢}$ ≡ (د+ج)(س) - $\frac{م}{٢}\|س\|_{٢}^{٢}$

فإن د+ج لها تحدب ميمي.

القضية الثالثة والعشرين إن كانت الدوالّ د$_{١}$، د$_{٢}$... د$_{ن}$ محدّبة وكانت ء$_{١}$، ء$_{٢}$... ء$_{ن}$ فإن:

$$\sum_{ل=١}^{ن} ء_{ل}\, د_{ل}$$

أيضا محدّبة.

وبرهانها من القضيّتين السابقتين بالاستقراء.

القضية الرابعة والعشرين. إن كانت د محدبة فإن ج(س) ≡ د(ع س+ب) [37] أيضا محدبة لأي أبعاد لـع وب.

برهانها: افرض د محدبة وج مُعرفة كذلك فإنه لكل س،ص∋منطلق(ج)،

ج(ت س+(١-ت)ص) = د(ع(ت س+(١-ت)ص)+ب) =

... بالاختزال (الاختصار)

= ت ج(س) + (١-ت)ج(ص)

$$
\begin{aligned}
g(t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{y}) &= f(\mathbf{A}(t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{y})+\mathbf{b}) \\
&= f(t\mathbf{A}\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{b}) \\
&= f(t\mathbf{A}\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{A}\mathbf{y}+t\mathbf{b}+(1-t)\mathbf{b}) \\
&= f(t(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b})+(1-t)(\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{b})) \\
&\le tf(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b})+(1-t)f(\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{b}) \qquad \text{convexity of } f \\
&= tg(\mathbf{x})+(1-t)g(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

القضية الخامسة والعشرين: إن كانت د و ج محدبتان فإن ه(س) ≡ أقصى [38] {د(س)،ج(س)} محدّبة.

برهانها افرضهما محدبتان وعرّف ه كذلك لكل س،ص∋منطلق(ه)

ه(ت س+(١-ت)ص) =

أقصى{د(ت س+(١-ت)ص)، ج(ت س+(١-ت)ص)}

... بالاختزال والتفريق بتطبيق قوانين التجميع والتبديل والتوزيع والمراوحة [39].

= ت ه(س) + (١-ت)ه(ص)

وانتبه أنه في المتباينة الأولى استعملنا تحديث الدالتين (د،ج) مع مُسلّمة (حقيقة) أن أ<= س و ب<=ص فإنه يقتضي أقصى{أ،ب} ≥ أقصى{س،ص}

وفي المتباينة الثانية استعملنا أن أقصى{أ+ب، س+ص} ≥ أقصى{أ،س} + أقصى{ب،ص}.

فعليه ه محدّبة.

[37] للتنبيه أن ع مصفوفة

[38] أقصى هنا بدلا من max ويمكن استعمال أكبر كذلك

[39] المراوحة Idempotency

أمثلة

من أنجع (أحسن) لكسب حدسٍ جيّد حول اختلاف التحديب وحيدا وفعليا وقويّا أن ترى أمثلة تُبيّنها:

دوال محدبة غير فعلية

(١) د(س) = و$^{T}$س+ ء لكل و ∈ ح$^{د}$ و ء ∈ ح دالّةٌ تسمى تآلفيّة affine وهي محدبة ومقعرة (والتعريف يشترط ذلك لها) ولاحظ أن الدوال الخطية والثابتة أحوالٌ خاصّة من التآلفيّات.

(٢) د(س) = ||س||$_{١}$ دوالّ فعلية لكن غير قوية

ودوال فعلية غير قوية

(أ) د(س) =س$^{٤}$ وهذه مشوّقة ماتعة إذ لا تقدر على اظهار مستعملا حجة الترتيب الثاني (سبقت) إذ مشتقه الثاني يساوي ٠.

(ب) د(س) = هـ$^{س}$ [40] وذا أيضا شيق لأنه محدودٌ أسفلهُ ولكن لا محليّة صُغرى.

(ج) د(س) = -لو س وهذا كذلك محدّب غير محدود.

ودوالّ قويّة

(-) د(س)= ||س||$_{٢}^{٢}$

[40] هـ هنا هو العدد الطبيعي e

# الاحتمال

نظرية الاحتمال يوفّر (يؤمن، يزود، يمد) أدوات (لوازم، معدات) قويّة (بليغة، عرمة) لنتعامل مع ما نرتاب فيه(عند الارتياب) (الاشتباه، الالتباس، التشكك، الريبة، الغموض)

## المبادئ (الأساسيات)

افرض عندَنا تجربة عشواءَ[41] (كرمِي نرد أو عُملة) فيها مجموعة مخرجات ثابتة تُدعى **فضاء العيّنة** رَمزُها فو[42].

نبغي تعريف احتمالاتٍ لبعض **الأحداث** تكون مجموعة جزئية من فو رمزها يكون ج[43]. **ومتمم** الحدث أ حدثٌ آخر رمزه أم ويساوي أم = فو/أ.

ثم نعرف **قياس الاحتمال** ق:ج←[٠، ١] وواجباته (شروطه):

(١) ق(ج)=٠.

(٢) **العدوديّة الجمعيّة** لكل مجموعات معدودة منفصلة {أن}⊆ج،

$$\text{ق}\left(\bigcup_{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ن}}\right) = \text{مجـ}_{\text{ن}}\,\text{ق}(\text{أ}_{\text{ن}})$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

الثلاثيُّ (فو،ج،ق) يُسمى **فضاءا احتماليًّا**[44]. إن كان ق(أ)=١ نقول أن "أ" **مؤكدة تقريبا** (اختصارها م.ت.) وعكسها **منعدمة تقريبا** إن كان ق(أ)=٠.

ومن هذه الموضوعات قواعدُ مفيدة تُستَشَقُّ.

الفرضية السادسة والعشرين فلتكن أ حدثًا فإن

- ق(أم) = ١-ق(أ)
- إن كانت ب حدثا وكانت ب⊆أ فإن ق(ب)≤ق(أ).
- ٠ = ق(∅) ≤ ق(أ) ≤ ق(فو) = ١

---

41 يُنظَرُ في تصريف عشا

42 استعمالا للرموز العربية استخدمتُ فو بدلا من Ω

43 استخدموا $\mathcal{F}$

44 تنبّه أن الفضاء الاحتمالي فضاء قياسي قياسه تامًّا يساوي واحدًا

البرهان:

للأولى باستعمال العدودية الجمعيّة لـق فيكون:

$$\text{ق}(\text{أ})+\text{ق}(\text{أ}^{\text{م}}) = \text{ق}(\text{أ}\cup\text{أ}^{\text{م}}) = \text{ق}(\text{فو}) = ١$$

وللثانية افرض $\text{ب}\in\text{ج}$ وكانت $\text{ب}\subseteq\text{ج}$ فإن

$$\text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}(\text{ب}\cup(\text{أ}/\text{ب})) = \text{ق}(\text{ب})+\text{ق}(\text{أ}/\text{ب}) \geq \text{ق}(\text{ب})$$

كالمُفترض.

وللثالثة: المتباينة المتوسّطة تتبع الثانية $\varnothing\subseteq\text{أ}\subseteq\text{فو}$. فعندنا:

$$\text{ق}(\varnothing)=\text{ق}(\varnothing\cup\varnothing)=\text{ق}(\varnothing)+\text{ق}(\varnothing)$$

والعدودية الجمعية $\text{ق}(\varnothing)=٠$.

الفرضية السابعة والعشرين

إن كانت أ و ب حدثين فإن $\text{ق}(\text{أ}\cup\text{ب})=\text{ق}(\text{أ})+\text{ق}(\text{ب})-\text{ق}(\text{أ}\cap\text{ب})$.

برهانها: يكون بتفريق وتفصيل المتداخلات:

$$\text{ق}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \text{ق}(\text{أ}\cap\text{ب})\cup\text{ق}(\text{أ}/\text{ب})\cup\text{ق}(\text{ب}/\text{أ})$$

$$= \text{ق}(\text{أ}\cap\text{ب})+\text{ق}(\text{أ}/\text{ب})+\text{ق}(\text{ب}/\text{أ})$$

$$= \text{ق}(\text{أ}\cap\text{ب}) + \text{ق}(\text{أ})-\text{ق}(\text{أ}\cap\text{ب})+\text{ق}(\text{ب})-\text{ق}(\text{أ}\cap\text{ب})$$

$$= \text{ق}(\text{أ}\cup\text{ب})=\text{ق}(\text{أ})+\text{ق}(\text{ب})-\text{ق}(\text{أ}\cap\text{ب})$$

الفرضية الثامنة والعشرين: إن كانت $\{\text{أ}_{\text{ن}}\}\subseteq\text{ج}$ أحداثا معدودة منفصلة كانت أو غير منفصلة فعليه:

$$\text{ق}(\bigcup_{\text{ن}}\text{أ}_{\text{ن}}) \leq \text{مجـ}_{\text{ن}}\,\text{ق}(\text{أ}_{\text{ن}})$$

وهذه المتبانية قد توسمُ **بمتبانية بُول أو اجتماعٍ حدّيٍّ union bound.**

برهانها: عرف $\text{ب}_{١}=\text{أ}_{١}$ و $\text{ب}_{\text{ن}}= \text{أ}_{\text{ن}}/(\bigcup_{\text{ك}<\text{ن}}\text{أ}_{\text{ك}})$ لكل $\text{ن}>١$، ولاحِظ أن $\bigcup_{\text{ك}<\text{ن}}\text{ب}_{\text{ك}} =\bigcup_{\text{ك}<\text{ن}}\text{أ}_{\text{ك}}$ لكل ن و $\text{ب}_{\text{ن}}$ منفصلة فعليه:

$$\text{ق}(\bigcup_{\text{ن}}\text{أ}_{\text{ن}}) = \text{ق}(\bigcup_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{ن}})=\text{مجـ}_{\text{ن}}\,\text{ق}(\text{ب}_{\text{ن}})\leq \text{مجـ}_{\text{ن}}\,\text{ق}(\text{أ}_{\text{ن}})$$

حيثُ آخر متباينة تتراتب (رتيبة مطردة) طالما $\text{ب}_{\text{ن}}\subseteq\text{أ}_{\text{ن}}$ لكل ن.

## الاحتمال الشرطيُّ

**الاحتمال الشرطي** لحدثٍ بأن صار آخر (أ معطًى أن ب حصل) يُكتب ق(أ|ب) وتعريفُه:

$$ق(أ|ب) = \frac{ق(أ\cap ب)}{ق(ب)}$$

مفترضًا أن ق(ب) > ٠ ب[45]

## قاعدة السلسلة

وتي أخرى مفيدة غاية الإفادة **قاعدة السلسلة**[46] تُكتب من اسمها:

$$ق(أ\cap ب)=ق(أ|ب)ق(ب)=ق(ب|أ)ق(أ)$$

## قاعدة بايز

بتعويضنا السابقة مع سابقتها يظهرْ لنا ما ظاهره اليُسر وباطنه الشدة والعسر **قاعدة بايِز:**

$$ق(أ|ب) = \frac{ق(ب|أ)ق(أ)}{ق(ب)}$$

وفي أحيانٍ أخر نتجاهل (نغض الطرف) عن المناظِم الثابت وتُكتب

ق(أ|ب) تطّرد مع ق(أ)ق(ب|أ)

ومع هذا الصوغ (أو هذه الصياغة) "ق(أ)" يُسمى هذا الطرف **السابقَ** وهذا "ق(أ|ب)" **البعديّ** وذا "ق(ب|أ)" **الأرجحية.**
وفي سياقِ علم المعالَجَة[47] نستعمل هذه القاعدة لنغيّر تصوّراتنا (والتي قد تكون قيمَ وُسُطاء النموذج) بما شاهدناه.

---

[45] أحيانا يجوز تعريف احتمالٍ شرطيّ لأحداثٍ احتمالها صفرٌ وذا أدق وأعقد مما نرنو هنا.

[46] س:هذه الاصطلاح وضعه معجم وأنا أحبذ النظر فيه إذ لفظه منقول لفظًا من الكلزية لا يقارب حقَّ الاستخدام ويُمكن تسميته "القاعدة المُسَلسِلة" أو "السالّة" فالأول لأنها تسلسل الحل من داخل المُعطى والثانية لأنها تسُلُّه.

[47] للتذكير المعالثة هي التعلم الآلي (وأحب تسمية التعلّم المُحَوسَب فتصير التعوسب)

## متغيّرات عشوائية

وهي كميات غير محدد لها توزيع إحصائي على قيَمِها.[48]

وبشكل مضبوطة أكثرُ: المتغيرُ العشوائي على فضاء احتمالي (فو،ح،ق) هو دالّة[49] س:فو←ح[50].

نرمزُ لمستقرِ س بـ س(فو)={س(ه) : ه∈فو} وكمثال موَضِّح افرض س عدد الطرر والنقوش لعملة معدولة ففضاء العينة:

فو={ن ن, ط ط, ن ط، ط ن}

و س تحدد تماما من مخرج ه كمثالٍ س = س(ه) فإن كان س=٠ هي مجموعة مخرجات {ن ط، ط ن}.

وشاع ذكرُ قيم المتغير العشوائي بلا إشارة لفضاءه العيِّنيّ وهما مرتبطان بالتعريف التالي: الحدث الذي قيم س تقع في مجموعة سو⊆ح هو:

ق(س=س) {ه∈فو: س(ه)=س}

كلمة عن الترميز: نحن نكتب ف(س) لنشير الى كامل التوزيع الاحصائي لس و ف(س)لتقييم الدالة ف عند قيمة محددة س∈س(فو) وحَسُنَ أن هذه التراميز غير مشتتة. إن كانت ف مُستوسطةً فوسطاءَ رمزهم و فنكتب ف(س؛و) أو ف(س،و) حاشا الأوضاع البيزيّة فوسطاءها عشوائيون وعليهم نشترط.

## دالة توزيعٍ تراكميّ

وهي اختصارا (دزكّية) تعطي احتمال أن يكون متغير عشوائيٌّ على الأكثر كذا:

ك(س) =ق(س ≤ س)

والدزكية تُستعمل لتعطي موضعًا للمتغير بين مدىً معيّن:

ق(ب ≤ س > أ) = ك(ب)-ك(أ)

---

[48] المستقر يُمكن أن يكونَ أيّ فضاء مقيس ولكن المذكور هو المشهور

اب ى و ز ح ط ي ي ك م س ع ف ص ق ر ش ت ث خ ذ ض ظ غ ب ں ف ق ب ج ه ح ي ك ل م ن س ع ف ص ق ش ت ث خ ض غ ج ح ي ل ن س ع

ق ش ض غ يا كا ما نا سا عا فا صا قا شا تا ثا خا ظا غا با فا ا ب و ه و ح ط ي م ن س و ع ف و ص و ق و ت و ث و خ ذ ض و مح حـ د مـ غ ظ ض ذ

خ ت ش ر ق ص ف ع س ن م ل ي ط ح ز و د د ج ص ف

[49] يشترط فيها أن تكون مقيسة

متغيرات عشوائية متقطعة

وهي المعدودة المدى مُفترضُ احتمالَها الموجب. المتغيرات العشوائية المتقطعة تُعرّف كاملا **بدالة كتلة الاحتمال** (دكلة) د:سـ(فـو)←[٠،١] الموافقة لـ:

$$\text{مجــ}_{\text{س}\in\text{سـ(فـو)}}\ \text{د(س)} = ١$$

و لسـ متقطعة فإن احتمال قيمة محددة (معينة) منها تساوي ما ينتج من دكليّتها

$$\text{ق(سـ=س)=د(س)}$$

متغيرات عشوائية متصلة

وهي عكس السابقة (غير معدودة المدى) وتفترض صفرية احتمال أي قيمة منه. ومعظمها مما يُجتمع في التطبيق تُسمى **متغيرات عشوائية متصلة بإطلاق**[51]. ما يعني وجود دالة د:ح←[٠،∞] تحقق

$$\text{ك(س)} \equiv \int_{-\infty}^{\text{س}} \text{د(ز) م‍ـز}$$

الدالة د تُسمى **دالة كثافة الاحتمال** (اختصارا دكية) ويُشترط تحقيقُها:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{د(س) م‍ـس} = ١$$

قيم هذه الدالة ليسوا بذاتهم احتمالات إذ قد يجاوزوا الواحد ومع ذلك لهم بضعُ تخريجات (أداء، تأويل) مفيدة. أحدها احتمالات نسبية، مع كون احتمال مفرداتها إن اِختيرت ظاهريًّا صفرٌ فبعض نقاطها تبقى (تظل) أظهَر من أخرى. يُمكن لناظر أن يظُنَّ بالكثافة أنها احتمال أن المتغير يقع في مدى صغير لقيمة مُعطاة وذا بسبب ق>٠،ب[52]

$$\text{ق(س-ق <= سـ <= س+ق)} = \int_{\text{س-ق}}^{\text{س+ق}} \text{د(ز) م-ز} \approx \text{٢ق د(س)}$$

مستعملا تقريب نقطة المنتصف للتكامل.

وخذ بضعَ متطابقات تتشكل (تنسل) من التعاريف أعلاه:

$$\text{ق(أ <= سـ} \le \text{ب)} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) م-س}$$

$$\text{د(س)=كَ(س)}$$

---

[51] وما هو متصل ولكن غير مطلق يُسمى **متغيرات عشوائية شاذة** ولن نناقشهم مفترضين أن تسلم كل العشوائيات المتصلة بدالة الكتلة.

[52] للتنبيه هذه القاف بديل عن الحرف ابسلون ε

أنواع أخرى للتمغيرات العشوائية

وتوجد مما ليس متصلا ولا منفصلا (متقطعا) نخذ مثالا متغير عشوائي يُحدد بقلب عملة معدولة فإن القيمة صفر إن أتت طرّة وإلا فرقم يُنتقى بانتظامٍ عشوائي (اعتباطيّ). فمثل هذا يوصف بغير المعدود لقيم كثيرة ولكنّها محدودة لاحتمالٍ موجب. لن نناقش ما هذا وصفه لأنهم صِعابٌ من شروط تحليلهم نظرية القياس.

## التوزيعات المشتركة

عادة لدينا عدد من العشوائيات نريدُ توزيعاتها فوق بعض تركيباتها. **التوزيع المشترك** هو ذاك. فلبعض العشوائيات $\text{س}_1،\dots،\text{س}_\text{ن}$ فالتوزيع المشترك $\text{د}(\text{س}_1،\dots،\text{س}_\text{ن})$ يعطي الاحتمالات لكل أمثولة (انتداب، إفراد، أيلولة، تحصيص، تخصيص) لـ $\text{س}_\text{ر}$ معًا.

استقلال المتغيرات العشوائية

نصف متغيرين س،ص **باستقلالهما (الاستقلال)** إن كان مشترك توزيعمها يفترقُ (يتحلل) لتوزيعهما الأصلي

$$\text{د}(\text{س}،\text{ص})=\text{د}(\text{س})\,\text{د}(\text{ص})$$

ونقدر على تعريف ذلك لأكثر من اثنين ولكنّها تتعقد. فلتكن $\{\text{س}_\text{ر}\}_{\text{ر}\in\text{ه}}$

جماعةً من متغيرات عشوائية مُوَضَعةً (خانتها) بـ ه، وقد تكون غير منتهية وعليه $\{\text{س}_\text{ر}\}$ جماعة مستقلة لكل مجموعة أدلة جزئية

$\text{ر}_1،\dots،\text{ر}_\text{ن}\in\text{ه}$ فلدينا

$$\text{د}(\text{س}_{\text{ر}_1}،\dots،\text{س}_{\text{ر}_\text{ن}})=\prod_{\text{ج}=1}^{\text{ك}}\text{د}(\text{س}_{\text{ر}_\text{ك}})$$

فمثلا لو كان عندنا ثلاث عشوائيات س،ص،ع فإن د(س،ص،ع) بأي ترتيب يكون كذلك.

وعادةً مشككة مقنعة تقترح(اعتقاد) بضع عشوائيات **مستقلة ومتطابقة توزيعيًّا (سَقْطَعِيَّة)** يكن توزيعها المشترك تتحلل:

$$\text{د}(\text{س}_{\text{ر}_1}،\dots،\text{س}_{\text{ر}_\text{ن}})=\prod_{\text{ج}=1}^{\text{ن}}\text{د}(\text{س}_\text{ج})$$

## توزيع هامشيٌّ

إن كان لدينا توزيع مشترك لبعض العشوائيات فيمكن استخلاص (استجلاب) توزيع لمجموعة جزئية منها بـ"جمع" (أو ما استكمالهم في حالة الاتصال) المتغيرات المغضوضِ الطرف عنها (مالا نريده)

$$\text{د}(\text{س}) = \text{مجـ}_\text{ص}\ \text{د}(\text{س}،\text{ص})$$

## التوقع العظيم

إن كان لدينا متغير عشوائي س فقد نَتَطَلَّبُ حساب متوسّط قيمته. وذا المفهوم يُلتقط من **القيمة المتوقعة** (**المتوسط**) م[س] وتعرف بالتالي

$$\text{م}[\text{س}] = \text{مجـ}_{\text{س} \in \text{س}(\text{ف})} \text{س د(س)}$$

للمتقطع

وأما المتصل

$$\text{م}[\text{س}] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س د(س)}$$

فنحن هنا نحسب المجموع الموزون (المُثقل) للقيم الممكنة لس حيثُ الأوزان هي احتمالات القيم المتوقع وهذه القيمة (المتوقعة) لها تخريج مادي اسمه أوسط كتلة التوزيع الاحتمالي.

### خصائص القيمة المتوقعة

من أفيَدِ ذلك وأحسنه أنها خطيّة

$$\text{م}\left[\text{مجـ}_{1}^{\text{ن}} \text{أ}_{\text{ك}}\text{س}_{\text{ك}} + \text{ب}\right] = \text{مجـ}_{1}^{\text{ن}} \text{م}[\text{أ}_{\text{ك}}\text{س}_{\text{ك}}] + \text{ب}$$

والحظ أن ذلك ثابت ولو كان المتغير غير مستقل.

وكذا قاعدة المضروبة تثبت وتبقى:

$$\text{م}\left[\text{مضـ}_{1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\right] = \text{مضـ}_{1}^{\text{ن}} \text{م}[\text{س}_{\text{ك}}]$$

## التباين

التوقع (المتوسط) يعطي قياسا عن وسط التوزيع ولكن المعتاد المتكرر طلبُه معرفة توزيع (انتشار) المعطيات حول الوسط.

فنعرف دالة التباين

$$\text{ت(س)} = \text{م}[(\text{س} - \text{م}[\text{س}])^{2}]$$

وكتابيا فهذه تبين متوسط مربع انحراف قيم س عن متوسط س. وبقليل من الجبر وخطيّةُ التوقع هنا تسهل عرض

$$\text{ت(س)} = \text{م}[\text{س}^{2}] - \text{م}[\text{س}]^{2}$$

خصائص التباين

التباين غير خطي (بسبب التربيع في التعريف) ولكنّ أحدنا يستطيع اظهار التالي

ت(أس+ب)=أ$^{٢}$ت(س)

فبشكل ميسر فالثوابت الضربية (الجداءية) تتربع عند اخراجها وأما الجمعية فتختفي (تتجاهل) (بالنظر الى أن التباين يتحرك بثوابت قيمته صفر)

وعليه فإن كان س$_{١}$، ... ،س$_{ن}$ غير مترابطين[53] فإن التباين يتوزع

ت(س$_{١}$، ... ،س$_{ن}$)=ت(س$_{١}$)+ ... +ت(س$_{ن}$)

الانحراف المعياري

التباين مفيد ولكنه يعاني من حقيقة أن وحداته غير وحدات المتغير العشوائي (بسبب التربيع) فلتجاوز ذلك نستعمل **الانحراف المعياري** المعرّفِ بـ $\sqrt{\text{ت(س)}}$ فهذا له نفس الوحدات.

## التغاير (تباين مشترك)

وهو قياس العلاقة الخطية بين متغيرين عشوائيين ونرمز له بين س،ص غ(س،ص) ونعرفها كالتالي:

غ(س،ص)= م[(س-م[س]) (ص-م[ص])]

ولاحظ أن التوقع الخارجي يجب أن يُؤخذ (يحسب) على التوزيع المشترك لهما.

ونعيد أن خطيّة العلاقة تسمح بإعادة كتابتها كـ

غ(س،ص)=م[س ص]-م[(س]م[ص]

ومقارنة ذلك بمعادلة التباين يظهر أنك لو عوضتَ بدلا من ص غ(س،س) هي هي.

ومن خصائصها المميز المفيدة للتغاير هي **ثنائية الخطية:**

غ(أس+ب ص، ع)=أغ(س،ع)+بغ(ص،ع)

[ورتبها كما تريد]

[53] لم نعرف بعد الترابط وسيأتي في فقرته

الارتباط

بتناظم التغاير نُعطى **الارتباط**

ط(س،ص)=غ(س،ص)/ جذر(ت(س)ت(ص))

$$ط=\frac{\text{غ(س،ص)}}{\sqrt{\text{ت(س)ت(ص)}}}$$

وهو يقيس العلاقة الخطية بين العشوائيين وخلاف التغاير حُدَّ بين -١ و ١.

المتغيران يقال لهما **غير مرتبطين** إن صَفُرَ تغايرهما إذ يُصفر الارتباط السابق فالمستقلان غير مرتبطين والعكس غير منطبق.

## المتجهات العشوائية

ما سبق ذكره والكلام عنه من توزيع **أحادي التغيّر** أي الذي لعشوائيّ واحد ونقدر أيضا الكلام عن **التوزيع متعدد المتغيّرات** والذي يُعطي توزيعات **متجهات عشوائية**

**س** = [ن س ... س١]^منقول

والمعتصرات (الملخصات) السابقة لأحادي التغير فيها نفس مُعمم على حالة عديدة المتغيرات.

فمتوقع المتجه العشوائي هو تطبيقها على كل متغيرٍ فيه.

وأما تباين فيُعَمَّم **بمصفوفة التغاير**

$$\text{تو}=\text{م}[(\text{س}-\text{م}[\text{س}])(\text{س}-\text{م}[\text{س}])^{\top}]=\begin{bmatrix}\text{م(س}_{1}\text{)} & \text{غ(س}_{1}\text{،س}_{2}\text{)}\dots & \text{غ(س}_{1}\text{،س}_{ن}\text{)}\\ \text{غ(س}_{2}\text{،س}_{1}\text{)}\dots & \ddots & \text{غ(س}_{2}\text{،س}_{ن}\text{)}\\ \text{غ(س}_{ن}\text{،س}_{1}\text{)} & \cdots & \text{م(س}_{ن}\text{)}\end{bmatrix}$$

اذ الدليل (الموضع أو الخانة) للتغاير عن ع،غ على أن التغاير تناظريّ فهذه المصفوفة متناظرة وهي كذلك نصفُ موجبة لكل س:

**س**$^{\top}$تو**س**=

$$\mathbf{x}^{\top}\mathbf{\Sigma}\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\top}\mathbb{E}[(\mathbf{X}-\mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X}-\mathbb{E}[\mathbf{X}])^{\top}]\mathbf{x}=\mathbb{E}[\mathbf{x}^{\top}(\mathbf{X}-\mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X}-\mathbb{E}[\mathbf{X}])^{\top}\mathbf{x}]=\mathbb{E}[((\mathbf{X}-\mathbb{E}[\mathbf{X}])^{\top}\mathbf{x})^{2}]\geq 0$$

ومعكوس تو في بعض الأحيان يُسمى **مصفوفة الدقة**.

## تقريب الوسطاء[54]

نشده (ندخل الآن) بعض الأسس (القواعد) الإحصائية. نفترض افتراضاتٍ حول مشكلتنا بوصف نموذج **وسيطي (معاملي)** (كمثل توزيع يصف نتاج المعطيات)، ثم نلائمهوها فكيف نختار الوسطاء؟

### تقدير الأرجحية القصوى

وهي طريقة شائعة (قرقصيّة) مبدؤها الأساسيُّ اختيار قيم تفسر المعطيات باستعظام (استقصاء) أعلى احتمالٍ أو كثافة لها.
فافرض متغيرات عشوائية س١، ... ،س ن ومقابلها المشاهد س١، ... ،س ن فإن

[55]فو قرقصية = أقصى فو السعة لجـ (فو)

حيث جـ هو الدالة الأرجحية

جـ (فو) = د (س١،...،س ن؛ فو)

وعادة نفترض سقطعية[56] س١، ... ،س ن فنقدر على كتابة التالي:

$$د(س_1،...،س_ن؛فو) = \prod_{ج=1}^{ن} د(س_ج؛فو)$$

وهذا المكتوب عادة ما يُلَغنم (لوغاريتم) فيصير:

لوغا(جـ (فو)) = مجـ(لوغا(د (س ج؛فو)))

وهذا مسموح به صائب لأن الاحتمالات والكثافات مُفترضٌ موجبيّتها وحيث أن اللغنمة دالة رتيبة متزايدة فهي تحفظ الترتيب فأي استزياد (استعظام/استقصاء) للملغنمة فهو كذلك للأصلية
لبعض التوزيعات يمكن حلّها تحليليًّا للمقدر إن كان الملغنم جـ منشقا إذ نصفرّه ثم نحل بالنسبة لفو.

---

[54] في مصادر أخرى قد سمّوًا parameter معاملا وهو صالح أيضا

[55] ا ب ء و ز ح ط ي ي ك م س ع ف ص ق ر ش ت ث خ ذ ض ظ غ ں ف ٯ ب ج ه ح ي ك ل م ن س ع ف ص ق ش ت ث خ ض غ ج ح ي ل ن س ع ق ش ض غ يا كا ما نا سا عا فا صا قا شا تا ثا خا ظا غا ا فا ا ب و ه و ج ط ي م ن س و ع ف و ص و ص و ق و ت و ث و خ ذ ض و مـ حـ د مـ غ ظ ض ذ خ ت ش ر ق ص ف ع س ن م ل ي ط ح ز و د د ج ص ف

[56] س: انظر فصل استقلال المتغيرات العشوائية

استعظام المُقَدِّرِ البُعْدُي

سبيلٌ أكثر بيزيّةً لملائمة الوسيطات باستعمال هو **التقدير المستعظم البعدي (تظع)** وفيه نحسب (نفترض) الوسيطات متغيرا عشوائيا ونحدد توزيعا بعديًّا د(فو) ثم نطبّق قاعدة بايز لنحسب التوزيع البعدي لوسيطات المعطيات

د(فو|س$_{١}$،...،س$_{ن}$) مطرد مع د(فو)د(س$_{١}$،...،س$_{ن}$|فو)

حساب المنظّمات الثابتة عسير لأنه يتضمن تكاملا على فضاء الوسيط والذي يصير كبير الأبعاد ونحمد الله أننا نريد المقدر التظعي ولا نهتم بالثابت النظيمي. ولا يؤثر أي قيمة لفو تعاظم المقدر فلدينا:

فو$_{\text{تظع}}$ = أقصى$_{\text{فو}}$ السعة لجـد(فو)د(س$_{١}$،...،س$_{ن}$|فو)

ومجددا افتراض سقطعية العشوائيات ندخل المنلغم على السابقة.

وحالة خاصة عندما نختار قبليًّا بحيث أن البعديّ يأتي من نفس عائلته ويُسمى عندها **قبليٌّ مترافق** كمثال ان كانت الأرجحية حدّانية وكان القبلي بائيًّا فالبعدي أيضا بائيٌّ. هناك الكثير من القبليات المترافقة (انظرها هنا)

## التوزيع الجوسيّ

هناك العديد من التوزيعات الإحصائية ولكن من أهمها هو **التوزيع الجوسيّ** المعروفِ **بالتوزيع الطبيعي** وهو متصل موسطًا بتوسّطه م∋ح$^{\text{د}}$ ومصفوفة تغاير نصف إيجابيّة سو∋ح$^{\text{د×د}}$ بكثافةٍ:

د(س؛م,سو) = $\frac{١}{\sqrt{(\text{٢ط})^{\text{د}}\text{محـ(ح)}}}$ هـ(-$\frac{١}{٢}$(س-م)$^{T}$س$^{-١}$(س-م))

وفي حالة البعد الوحيد د=١ تتبسّط لـ (وذكرتها هكذا لشهرتها ولمن أحب كتابها بالعربي فليتدرّب)

$$p(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

ونكتب س~ج(م،سو) لنرمز أن س مُوزّعة طبيعيا بالمتوسط م والتغاير س.

### هندسة عديدات الجوسيّة

وهندسة كثافتها متعلق بهندسة موجبات الصيغ التربيعية المنتهية فاحرص على ضبط ذلك القسم فتيسر فهم هذه الفقرة.

أولا لاحظ أن دالة الكثافة الاحتمالية لعديدات الجوسية يُمكن كتابتها

د(س؛م،س)=ض($\overline{\text{س}}^{T}$س$^{-١}\overline{\text{س}}$)

حيث $\overline{\text{س}}$ تساوي المغاير وض(ز)=[(٢ط)$^{\text{د}}$محد(س)]$^{-١/٢}$هـ(-ز/٢) وكتابة الكثافة هكذا تبين أن بعد الإزاحة بقيمة المتوسط الكثافة تصير دالة مصفوفة الدقة بالصيغة التربيعية.

وهنا مشاهدة مفتاحية أن الدالة ض